现代数学丛书

陆善镇 著

H^p空间实变理论及其应用

REAL VARIABLE THEORY OF H^p SPACES AND ITS APPLICATIONS

LU SHAN-ZHEN



·现代数学丛书·

H^p空间实变理论及其应用

陆善镇 著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

REAL VARIABLE THEORY OF H^p SPACES AND ITS APPLIC ATIONS

Lu Shanzhen

Shanghai Scientific & Technical Publishers

(沪)新登字 108 号

责任编辑　唐仲华

现代数学丛书
H^p 空间实变理论及其应用
陆善镇　著
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　　常熟市印刷二厂印刷
开本 850×1156 1/32　印张 7　字数 174,000
1992 年 12 月第 1 版　　1992 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—2000
ISBN 7-5323-2744-2/O·158
定价：5.80 元

内 容 提 要

本书是一本专著，它反映了 $H^p(R^n)$ 空间的实变理论及其在分析领域某些方面的应用。全书分四章，前两章是 H^p 空间实变理论的理论部分，其中第 1 章是 H^p 空间 Fefferman-Stein 的理论，第 2 章是 H^p 空间的分解结构理论，后两章是 H^p 空间实变理论对某些分析问题的应用，其中第 3 章是研究调和分析中若干基本算子在 H^p 上的有界性质，而第 4 章是研究某些基本算子在 H^p 中的逼近性能。

第 2 章和第 3 章中的某些内容是我国学者新近的研究成果，而第 4 章的全部内容是由我国学者所贡献的。

本书可用作数学专业研究生教材，也可供逼近论、偏微分方程、泛函分析、概率论等方面的数学工作者参考。

REAL VARIABLE THEORY OF H^p SPACES AND ITS APPLICATIONS

Lu Shanzhen

Abstract

This is a monograph on the real variable theory of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces and its applications to some respects in analysis fields.

The whole book consists of four chapters: Chapter 1, Real variable theory of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces; Chapter 2, Decomposition structure theory of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces; Chapter 3, Applications to some respects in Fourier analysis; Chapter 4, Applications to approximation theory.

The basic theory of Fefferman-Stein, the atom decomposition theory of Coifman-Latter, and the molecular decomposition theory of Taibleson-Weiss are systematically introduced in the first two chapters. Many recent research fruits by Chinese mathematicians are contained in Chapter 2 and 3, such as weak H^p spaces, elliptic Riesz means on H^p spaces, transference theorem of H^p multiplier, and so on. The materials in Chapter 4 are fully contributed by chinese mathematicians.

This book can be used as a text for graduate students in mathematics department as well as a reference book for those mathematicians studying in the fields of approximation theory, differential equation, functional analysis and probability theory etc..

出版说明

从六十年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本丛书所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，十八位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社
1991年4月

前　言

我们知道，H^p 空间的研究已经历了很长的时期。古典的 H^p 空间是在单位圆周上或上半平面上由复变方法定义的。这些空间的理论在研究古典 Fourier 分析的问题时起了重要作用。随着 n 维 Fourier 分析的发展，自然产生要将上述空间的定义向 n 维推广的问题。首先进行这项工作的是 E. M. Stein 和 G. Weiss，他们在六十年代初所建立的 n 维 H^p 空间的定义及其理论不是基于复变方法上的，而是采用调和函数的方法。无论古典的 H^p 空间或上述 n 维 H^p 空间的理论，直到七十年代才有了一个突破性的发展，使得近十几年来关于 H^p 空间的研究成为现代调和分析中最蓬勃发展的领域之一。其原因之一在于实变方法从此进入了 H^p 空间理论的研究之中。首先进行这种尝试的是 D. L. Burkholder, R. F. Gundy 和 M. L. Silverstein，他们用概率论方法给出了一维 H^p 空间的一个实变特征。接着，C. Fefferman 和 E. M. Stein 把此结果用实分析方法推广到 n 维，并且指出完全可以用同复变或调和函数方法无关的多种形式的极大函数来刻画 H^p 空间的特征。这标志着 H^p 空间实变理论的确立。这个理论的深入发展阶段便是 H^p 空间的分解结构理论的建立。后者的思想是从微观的观点来看待函数空间，也就是把 H^p 空间的元素看成为一列"基本元素"依某种形式的叠加。概言之，H^p 空间是由这些"基本元素"生成的，如同在物理学中，物质世界是由"基本粒子"生成的那样，人们把生成 H^p 空间的"基本元素"叫做原子。这些称之为原子的"基本元素"有着某些特定的实变性质。根据分解结构理论，人们可以将调和分析中的许多问题归结于很简单的情

形。具体地说，当研究 H^p 空间的元素是否具有某种性质时，通过原子分解结构理论，往往只需考虑任一原子是否具有某种相应的性质，而对后者的研究，由于原子本身所具有的实变性质，使得问题变得相当简单。正是由于这个缘故，分解结构理论在研究许多分析问题时得到了广泛的应用。虽然 H^p 空间的分解结构理论产生于七十年代中期，但它的思想和方法至今仍在影响着对其它函数空间的研究，而它的理论也已渗透到其它数学领域之中。

本书分四章。前两章是 H^p 空间实变理论的理论部分。第1章以简短的篇幅介绍了 Fefferman-Stein 的理论，而对于 Stein-Weiss 的理论，则假定读者是已知的，这样处理的目的是使读者尽快地进入现代理论的前沿。第2章比较详细地介绍了 H^p 空间的分解结构理论。除了这个理论本身外，还涉及到 H^p 的对偶空间，算子在 H^p 中的插值，以及 H^p 空间的插值等。这些内容既使得分解结构理论更加丰富，也是后两章研究应用时所需要的。后两章内容着重说明 H^p 空间的实变理论，特别是分解结构理论在解决分析问题时所起的作用。第3章是研究调和分析中若干最基本的算子在 H^p 上的有界性质，可以说其中绝大部分的结果都是很基本的。需要指出：第2章和第3章中的某些重要结果是作者及其研究生的研究成果。第4章的内容是以作者及其研究生的研究成果为主要线索，这一章内容足以说明 H^p 空间的实变理论，特别是分解结构理论在研究 H^p 中的逼近问题时，仍是一个强有力的工具。

本书是在作者对北京师范大学历届函数论专业研究生的选修课讲义的基础上整理而成的。前两章的大部分章节还是作者在1988年南开数学研究所举办的调和分析年会上向全国高校部分研究生授课的内容。本书虽然已使用多遍，但限于作者的水平，其中缺点和错误必定还不少，恳请专家和读者给予指出。

应当指出，本书写作能够完成，首先要感谢美国 St. Louis 华盛顿大学的 Guido Weiss 教授，作者在该校访问的两年期间，同他有过十分愉快的合作，受益匪浅。他所赠予的丰富材料是完成

本书第2章的重要素材．同时，要感谢中国科学院学部委员、北京大学程民德教授，以及北京师范大学孙永生教授对作者的一贯支持和鼓励．特别是程先生主持的1988年调和分析年会邀请作者作“H^p空间”的讲座，使作者对本书前两章主要内容有再一次教学实践的机会．最后，还要感谢王昆扬博士、刘智新博士、刘和平博士、张严博士、江寅生同志、戴龙祥同志、陈国良同志、马柏林同志等，他们在作者授课中所提出的宝贵意见改正了本书初稿中的不少错误，他们所完成的科研成果也是对本书的重要贡献．

陆　善　镇

1990年夏于北京师范大学

目　录

CONTENTS

第1章

$H^p(\mathbb{R}^n)$空间的实变理论

§1 $H^p(\mathbb{R}^n)$空间的定义

古典的 H^p 空间是对一类解析函数来定义的（参见 Duren [Du 1]或 Zygmund [Zy 1]）。所谓空间 $H^p(\mathbb{R}^2_+)$，是指由一切满足下面条件的、在上半平面 $\mathbb{R}^2_+$ 上解析的函数F所构成的空间：

$$\sup_{0<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^p dx<\infty,\ 0<p<\infty.$$

可以证明：当 $F\in H^p(\mathbb{R}^2_+)$时，其实部的边值

$$\lim_{y\to 0}\mathrm{Re}\{F(x+iy)\}$$

几乎处处存在（一般来说，这样的边值是 $\mathbb{R}$ 上的广义函数）。为此，可以将一切 $H^p(\mathbb{R}^2_+)$中元素的实部边值组成一空间，并称它为实 $H^p(\mathbb{R})$空间，即

$$\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{R})=\{f:f(x)=\lim_{y\to 0}\mathrm{Re}\{F(x+iy)\},\ F\in H^p(\mathbb{R}^2_+)\}.$$

后面将看到，这个 $\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{R})$当 $p>1$ 时是同 $L^p(\mathbb{R})$ 一致的，而当 $0<p\leqslant 1$ 时，它同 $L^p(\mathbb{R})$有本质的差别。

随着 n 维 Fourier 分析发展的需要，自然存在着将 $\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{R})$ 向 n 维拓广的问题。E. M. Stein 和 G. Weiss 基于 F $(\in H^p(\mathbb{R}^2_+))$的实部和虚部满足 Cauchy-Riemann 条件这一事实，提出了广义 Cauchy-Riemann 方程的概念，进而定义了空间 $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$（见 E. M. Stein, G. Weiss [SW 1]）。准确地说，考虑一组 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$上的调和函数

$$F(x_1,\cdots,x_n,y)=(u_0(x_1,\cdots,x_n,y),\cdots,\\ u_n(x_1,\cdots,x_n,y)),$$

它们满足广义 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}=\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0\end{cases}\quad(0\leqslant i,\ j\leqslant n),\tag{1.1}$$

其中 $x_0=y$。现在，定义

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})=\left\{F:F\text{ 满足(1.1)},\ \sup_{0<y<\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|^p dx<\infty\right\}.$$

同样，可以使用 $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ 中元素之第一个分量的边值来定义实 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 空间：

$$\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R}^n)=\{f:f(x)=\lim_{y\to0}u_0(x,y),\ F\in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})\}.$$

顺便指出：Stein 和 Weiss 定义 $\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$时，对指标 p 有如下的限制：$p>(n-1)/n$。后来，A. P. Calderón, A. Zygmund [CZ 1]把这个限制去掉，从而得到了对一切的 $p(0<p<\infty)$ 有定义的空间 $\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$，并通称它们为实 Hardy 空间。

到此，已注意到 $\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R})$ 是对一类解析函数来定义的，而 $\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$ 的定义方式也是由解析函数的性质演变而来的。从某种意义上来说，$\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$的定义方式也同解析函数有着密切的关系。到了七十年代初期，一个涉及空间 $\operatorname{Re}H^p$ 的实变特征的重要事实被发现。事实上，Hardy 和 Littlewood 很早就指出：如 $f\in\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R})$，则 f 的 Poisson 非切向极大函数

$$P_\nabla^*(f)(x)\triangleq\sup_{|y-x|<t}|f*P_t(y)|\in L^p(\mathbb{R}).$$

1971年 D. L. Burkholder, R. F. Gundy, M. L. Silverstein [BGS 1] 证明了上述的逆命题也成立。这样，人们可以用 f 的 Poisson 非切向极大函数 $P_\nabla^*(f)$是否属于 $L^p(\mathbb{R})$来判断 f 是否属于 $\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R})$了。显然，$\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R})$ 的这个特征已完全不需要借助解析函数的方式来描述，有趣的是[BGS 1] 的证明方法是概率论方法。1972年，C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1] 用实变方法把上述重要特征推广到了 n 维情形，从而产生了空间 $\operatorname{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$的一个等价定义。

定义 1.1 设 f 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的缓增广义函数，P 为 Poisson 核，如果 f 的 Poisson 非切向极大函数

$$P_\nabla^*(f)(x) \triangleq \sup_{|y-x|<t} |(f*P_t)(y)| \in L^p(\boldsymbol{R}^n),$$

则称 $f \in \mathrm{Re}\,H^p(\boldsymbol{R}^n)$，其中集 $\{(y, t): |y-x|<t\}$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1} = \{(y, t): y \in \boldsymbol{R}^n, t>0\}$ 中的角形区域，且 $P_t(x) = t^{-n}P(x/t)$。为简便起见，下面一概将 $\mathrm{Re}\,H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 记作 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$。

注 1.1 由于 $P \notin \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，其中 $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 为 Schwartz 类，故对一般的缓增广义函数 $f \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，Poisson 积分可能完全没有意义。实际上，定义 1.1 中的 f 应属于满足适当增长条件的广义函数类。为说明这一点，需要引入一个较 $\mathscr{S}$ 为更大的检验函数空间，使得 Poisson 核属于此检验函数空间，以及其对偶空间就是上面所指的广义函数类。今记

$$D_{L^1} = \{\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n): D^\alpha\varphi \in L^1(\boldsymbol{R}^n), \forall\alpha\},$$

其中 α 为 n 重指标，D^α 为微分算子，D_{L^1} 的对偶空间 $(D_{L^1})'$ 同 $\mathscr{S}'$ 有如下的关系（见 J. Barros-Neto [B 1]）：$f \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ 当且仅当存在非负整数 $K = K(f)$，使得 $(1+|x|^2)^{-K/2} f \in (D_{L^1})'$。因此，$(D_{L^1})'$ 中的元素比起 $\mathscr{S}'$ 中的元素一般是具有一定增长条件的。如果把 $\mathscr{S}'$ 称为缓增广义函数类，那末 $(D_{L^1})'$ 就是一个具有适当增长条件的广义函数类。同时，不难看出：$P \in D_{L^1}$。因此，对任一 $f \in (D_{L^1})'$，$f*P_t$ 是有意义的。换言之，定义 1.1 中的 f，确切地说，应是具有适当增长条件的广义函数。

有了定义 1.1，$H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的一个自然拓广是 C. Fefferman, N. M. Rivière, Y. Sagher [FRS 1]中定义的 $H(p, q, \boldsymbol{R}^n)$：

$$H(p, q, \boldsymbol{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}': P_\nabla^*(f) \in L(p, q, \boldsymbol{R}^n)\},$$

其中 $L(p, q, \boldsymbol{R}^n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lorentz 空间，其定义可参见 E. M. Stein, G. Weiss[SW 2]。显然，$H(p, p, \boldsymbol{R}^n) = H^p(\boldsymbol{R}^n)$，且当 $q>p$ 时，$H^p(\boldsymbol{R}^n) \subset H(p, q, \boldsymbol{R}^n)$。$H(p, q, \boldsymbol{R}^n)$ 通称为 Lorentz-Hardy 空间。

§2　非切向极大函数

从定义 1.1 可以看出，虽然实 $H^p(R^n)'$空间并不是借助解析函数的性质而定义的，但定义中的 Poisson 核表明，其定义方式仍未完全摆脱对调和函数的依赖性。于是，自然产生如下的问题：定义 1.1 中的 Poisson 核可否用其它的逼近恒等元来代替呢？C. Fefferman, E. M. Stein[FS 1] 对此作了肯定的回答。他们引进了如下的关于光滑函数 φ 的非切向极大函数。

定义 2.1　设 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$，且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$。如置

$$\varphi_{\nabla}^{*}(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|(f*\varphi_t)(y)|,$$

则称 $\varphi_{\nabla}^{*}(f)$ 为 f 的 φ 非切向极大函数。

为说明 $\varphi_{\nabla}^{*}(f)$ 同 $P_{\nabla}^{*}(f)$ 之间的关系，需先建立几个引理。

引理 2.1　设 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$，且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，则对任一 $\psi\in\mathscr{S}(R^n)$，以及任一 $N\in\boldsymbol{N}$，必有 $\theta^{(t)}\in\mathscr{S}(R^n)(0<t<1)$ 以及 $m\in\boldsymbol{N}$，使得

(i)　$\psi(x)=\int_0^1(\varphi_t*\theta^{(t)})(x)\mathrm{d}t$；

(ii)　$$\int_{R^n}(1+|x|)^N|\theta^{(t)}(x)|\mathrm{d}x\leqslant Ct^N\sup_{u\in R^n,|\alpha|\leqslant m}(1+|u|)^{m+n}\cdot|D^\alpha\psi(u)|,$$

其中 α 为 n 重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，以及

$$D^\alpha\psi(u)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1}\cdots\partial u_n^{\alpha_n}}\psi(u_1,\cdots,u_n).$$

证明　任取一$\zeta\in C^\infty(0,1)$，并满足

$$\zeta(t)=t^N/N!,\ \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant 1/2,$$
$$0\leqslant\zeta(t)\leqslant t^N/N!,\ \text{当}\ 1/2<t\leqslant 1,$$

以及 $\zeta^{(j)}(1)=0$，$0\leqslant j\leqslant N+1$。注意到

$$\frac{\partial^{N+1}}{\partial t^{N+1}}\underbrace{(\varphi_t*\cdots*\varphi_t)}_{N+2\ \text{重}}$$

$$= \sum_{i_1+\cdots+i_{N+1}=N+1} C_{i_1,\cdots,i_{N+1}}$$

$$\cdot \varphi_t * \frac{\partial^{i_1}\varphi_t}{\partial t^{i_1}} * \cdots * \frac{\partial^{i_{N+1}}\varphi_t}{\partial t^{i_{N+1}}},$$

其中 $i_j(1\leqslant j\leqslant N+1)$ 为非负整数，故如置

$$\theta^{(t)}(x) = (-1)^{N+1}\zeta(t) \sum_{i_1+\cdots+i_{N+1}=N+1} C_{i_1,\cdots,i_{N+1}} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^{i_1}\varphi_t}{\partial t^{i_1}} * \cdots * \frac{\partial^{i_{N+1}}\varphi_t}{\partial t^{i_{N+1}}} * \psi\right)(x)$$

$$-\zeta^{(N+1)}(t)(\underbrace{\varphi_t * \cdots * \varphi_t}_{N+1\text{ 重}} * \psi)(x),$$

则不难验证 $\theta^{(t)}$ 满足(i)和(ii)。事实上，对积分

$$I = (-1)^{N+1}\int_0^1 \zeta(t) \frac{\partial^{N+1}}{\partial t^{N+1}} \underbrace{(\varphi_t * \cdots * \varphi_t)}_{N+2\text{ 重}} * \psi \mathrm{d}t$$

关于变量 t 分部积分 $N+1$ 次，可得

$$I = \underbrace{\varphi_t * \cdots * \varphi_t}_{N+2\text{ 重}} * \psi \Big|_{t=0} + \int_0^1 \zeta^{(N+1)}(t) \underbrace{\varphi_t * \cdots * \varphi_t}_{N+2\text{ 重}} * \psi \,\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\varphi_t * \cdots * \varphi_t * \psi\,|_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \psi * (\varphi * \cdots * \varphi)_t = \psi,$$

则得

$$\psi = I - \int_0^1 \zeta^{(N+1)}(t) \underbrace{\varphi_t * \cdots * \varphi_t}_{N+2\text{ 重}} * \psi \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi_t * \theta^{(t)} \mathrm{d}t.$$

因此，(i)成立。其次，由不等式

$$|\zeta^{(N+1)}(t)| \leqslant Ct^N$$

可知，为证(ii)，只需证明：存在 $m\in N$，使得

$$\sup_{0<t<1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\frac{\partial^{i_1}\varphi_t}{\partial t^{i_1}} * \cdots * \frac{\partial^{i_{N+1}}\varphi_t}{\partial t^{i_{N+1}}} * \psi\right)(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sup_{u\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leqslant m} (1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|,$$

以及

$$\sup_{0<t<1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|(\underbrace{\varphi_t * \cdots * \varphi_t}_{N+1\text{ 重}} * \psi)(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sup_{u\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leqslant m} (1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|.$$

以上两式的证明相仿。下面仅给出第一式的证明。取一$m\geqslant N+1$，此时

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}\right)(x)\right|\mathrm{d}x\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}}(\psi*\varphi_{t_1})(x)\right|\mathrm{d}x\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}}\psi(x-t_1y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\
\leqslant&\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant i_1}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|\\
&\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|x|)^N(1+|y|)^{i_1}}{(1+|x-t_1y|)^{m+n}}|\varphi(y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
\leqslant&\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant i_1}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|\\
&\cdot\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^{N+i_1}|\varphi(y)|\\
&\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}x}{(1+|x-t_1y|)^{m+n-N}}\right)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

由上式可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0<t_1<1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}\right)(x)\right|\mathrm{d}x\\
\leqslant& C\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant i_1}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|.
\end{aligned}
$$

现在，再来考虑

$$
\sup_{0<t_1,t_2<1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}*\frac{\partial^{i_2}\varphi_{t_2}}{\partial t_2^{i_2}}\right)(x)\right|\mathrm{d}x.
$$

如置$\psi_1(x)=\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}\right)(x)$，并使用上面已证得的不等式，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}*\frac{\partial^{i_2}\varphi_{t_2}}{\partial t_2^{i_2}}\right)(x)\right|\mathrm{d}x\\
\leqslant& C\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant i_2}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi_1(u)|.
\end{aligned}
$$

注意到$D^\alpha\psi_1(u)=\left(D^\alpha\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}\right)(u)$，故当$|\alpha|\leqslant i_2$时，有

$$
\begin{aligned}
&(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi_1(u)|\\
=&(1+|u|)^{m+n}\left|\frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}}(D^\alpha\psi*\varphi_{t_1})(u)\right|
\end{aligned}
$$

$$= (1+|u|)^{m+n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^{i_2}}{\partial t_1^{i_2}}(D^\alpha\psi)(u-t_1y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \sup_{w\in\mathbb{R}^n, |\beta|<i_1+i_2}(1+|w|)^{m+n}|D^\beta\psi(w)|\cdot$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|u|)^{m+n}(1+|y|)^{i_2}|\varphi(y)|}{(1+|u-t_1y|)^{m+n}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \sup_{w\in\mathbb{R}^n, |\beta|<i_1+i_2}(1+|w|)^{m+n}|D^\beta\psi(w)|$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^{m+n+i_2}|\varphi(y)|\mathrm{d}y.$$

由以上两式便推得

$$\sup_{0<t_1,t_2<1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}*\frac{\partial^{i_2}\varphi_{t_2}}{\partial t_2^{i_2}}\right)(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sup_{u\in\mathbb{R}^n, |\alpha|<i_1+i_2}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|.$$

对于一般情形，同理可得

$$\sup_{0<t_1,\cdots,t_{N+1}<1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\left|\left(\psi*\frac{\partial^{i_1}\varphi_{t_1}}{\partial t_1^{i_1}}*\cdots*\frac{\partial^{i_{N+1}}\varphi_{t_{N+1}}}{\partial t_{N+1}^{i_{N+1}}}\right)(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sup_{u\in\mathbb{R}^n, |\alpha|<i_1+\cdots+i_{N+1}=N+1}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\psi(u)|.$$

在上式中取 $t_1=\cdots=t_{N+1}=t$ 时，便得到要证的不等式。

引理 2.2 若 $P_\nabla^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$0<p<\infty$，则存在一 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，以及径向极大函数

$$\varphi_+^*(f)(x)\triangleq\sup_{t>0}|(f*\varphi_t)(x)|\in L^p(\mathbb{R}^n).$$

证明 取一 $\psi\in C^\infty[1,\infty)\cap L[1,\infty)$，并满足

$$\int_1^\infty s^K\psi(s)\mathrm{d}s=\begin{cases}1, & \text{当 } K=0,\\ 0, & \text{当 } K\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

不难证明，这样的 ψ 是存在的(参见 E. M. Stein [St2, P182])

今置

$$\varphi(x)=\int_1^\infty\psi(s)P_s(x)\mathrm{d}s,$$

那末为证 $\varphi\in\mathscr{S}$，只需证明 $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}$。事实上，

$$\hat{\varphi}(\xi)=\int\varphi(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^\infty \psi(s)\widehat{P}_s(\xi)\mathrm{d}s=\int_1^\infty \psi(s)e^{-s|\xi|}\mathrm{d}s.$$

于是，由指数函数的性质可知 $\phi(\xi)$ 在无穷远处速降，并在除原点外光滑，又由渐近式

$$\phi(\xi)=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{|\xi|^k}{k!}\int_1^\infty s^k\psi(s)\mathrm{d}s+O(|\xi|^N)$$

和 N 的任意性可知 ϕ 在原点也光滑，故 $\phi\in\mathscr{S}$。其次，容易看出

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\phi(0)=1.$$

最后，

$$\begin{aligned}\varphi_+^*(f)(x)&=\sup_{t>0}|(f*\varphi_t)(x)|\\&=\sup_{t>0}\left|\int_1^\infty\psi(s)(f*P_{ts})(x)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\int_1^\infty|\psi(s)|\mathrm{d}s\cdot P_\nabla^*(f)(x).\end{aligned}$$

这就完成了证明。

引理 2.3 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，以及 $0<p<\infty$。若 $\varphi_+^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，则 $\varphi_\nabla^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|\varphi_\nabla^*(f)\|_p\leqslant C_{p,n}\|\varphi_+^*(f)\|_p.$$

证明 由 Fatou 引理，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\sup_{|x-y|<t<1/\varepsilon}\left|(f*\varphi_t)(y)\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}\right|\right\}^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C_{p,n}\|\varphi_+^*(f)\|_p^p. \tag{2.1}$$

为此，记

$$u_{\varepsilon,N}^*(x)=\sup_{|x-y|<t<1/\varepsilon}|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N},$$

其中 $0<\varepsilon<1$。首先指出：当 N 充分大时，$u_{\varepsilon,N}^*\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$。如将 $(f*\varphi_t)(y)$ 看成为定义在 $\mathscr{S}$ 上的有界线性泛函，熟知存在着非负整数 l 和 m，使得

$$|(f*\varphi_t)(y)|\leqslant C\sup_{x\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leqslant m}(1+|x|)^l|D_x^\beta\varphi_t(y-x)|,$$

其中 D_x^β 为关于 x 的 β 阶微分算子，常数 C 同 t、y 及 φ 无关(参见

E. M. Stein, G. Weiss[SW 2])。由初等不等式

$$\left(\frac{1+|x|}{1+|y|}\right)^r \leqslant (1+|x-y|)^r, \quad r\geqslant 0,$$

易得

$$|(f*\varphi_t)(y)|\leqslant C(1+|y|)^l \sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leqslant m}(1+|u|)^l|D_u^\beta\varphi_t(u)|.$$

注意到

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leqslant m}(1+|u|)^l|D_u^\beta\varphi_t(u)|\leqslant\begin{cases} t^{-n-|\beta|}\|\varphi\|, & \text{当 } t<1,\\ t^{-n-|\beta|+l}\|\varphi\|, & \text{当 } 1\leqslant t<1/\varepsilon,\end{cases}$$

其中 $\|\varphi\| = \sup\limits_{v\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leqslant m}(1+|v|)^l|D^\beta\varphi(v)|$。易知当$N$充分大时，有

$$|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}\leqslant C_\varepsilon(1+|y|)^{-N+l}.$$

于是

$$u_{\varepsilon,N}^*(x)\leqslant C_\varepsilon \sup_{|t|<1/\varepsilon}(1+|x-u|)^{-N+l}\leqslant C_\varepsilon(1+|x|)^{-N+l}.$$

故当N充分大时，$u_{\varepsilon,N}^*\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$。其次，如记

$$V_{\varepsilon,N,M}^*(x)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n,t<1/\varepsilon}|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N} \cdot\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^M,$$

以及

$$U_{\varepsilon,N}^*(x)=\sup_{|x-y|<t<1/\varepsilon} t|\nabla_y(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N},$$

则不难证明

$$\|V_{\varepsilon,N,M}^*\|_p\leqslant C_{p,n}\|u_{\varepsilon,N}^*\|_p, \quad \text{当 } M>n/p, \tag{2.2}$$

以及

$$U_{\varepsilon,N}^*(x)\leqslant CV_{\varepsilon,N,M}^*(x). \tag{2.3}$$

事实上，由 $u_{\varepsilon,N}^*$ 的定义可知

$$|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}\leqslant u_{\varepsilon,N}^*(z),$$

当 $z\in B(y,t)$。

注意到 $B(y,t)\subset B(x,|x-y|+t)$，则对任一 p_1 $(0<p_1<\infty)$，

有

$$\left\{|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}\right\}^{p_1}$$

$$\leqslant\frac{1}{|B(y,t)|}\int_{B(y,t)}\{u_{\varepsilon,N}^*(z)\}^{p_1}\mathrm{d}z$$

$$\leqslant C\left(\frac{|x-y|+t}{t}\right)^n\frac{1}{|B(x,|x-y|+t)|}$$

$$\cdot\int_{B(x,|x-y|+t)}\{u_{\varepsilon,N}^*(z)\}^{p_1}\mathrm{d}z.$$

因此，当 $M>n/p_1$ 时，有

$$\{V_{\varepsilon,N,M}^*(x)\}^{p_1}\leqslant CHL(u_{\varepsilon,N}^{*p_1})(x),$$

其中 $HL(f)(x)$为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数。由上式以及 HL 极大函数的性质便推得(2.2)。其次，由于

$$t|\nabla_y(f*\varphi_t)(y)|=|f*(\nabla\varphi)_t(y)|,$$

以及 $\nabla\varphi\in\mathscr{S}$，故由引理 2.1，可将 $\nabla\varphi$ 表示成

$$\nabla\varphi=\int_0^1\varphi_\tau*\theta^{(\tau)}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\theta^{(\tau)}\in\mathscr{S}$，$0<\tau<1$。因此，

$$t|\nabla_y(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}$$

$$=\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}\left|\int_0^1 f*\varphi_{\tau t}*\theta_t^{(\tau)}(y)\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}\int_0^1\int_{\mathbf{R}^n}|(f*\varphi_{\tau t})(y-z)|$$

$$\cdot|\theta^{(\tau)}(z/t)|t^{-n}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant V_{\varepsilon,N,M}^*(x)\int_0^1\int_{\mathbf{R}^n}\tau^{-N}(1+\varepsilon|z|)^N\left(\frac{|x-y+z|+\tau t}{\tau t}\right)^M$$

$$\cdot|\theta^{(\tau)}(z/t)|t^{-n}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant CV_{\varepsilon,N,M}^*(x)\int_0^1\int_{\mathbf{R}^n}\tau^{-M-N}(1+|w|)^{M+N}|\theta^{(\tau)}(w)|\mathrm{d}w\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant CV_{\varepsilon,N,M}^*(x).$$

上式最后一步用到了引理 2.1(ii)的结论，从而，(2.3) 式得证。由(2.2)和(2.3)式便知

$$\|U_{\varepsilon,N}^*\|_p\leqslant C_{p,n}\|u_{\varepsilon,N}^*\|_p.$$

因此，如记 $E_\varepsilon=\{x: U^*_{\varepsilon,N}(x)\leqslant C_0 u^*_{\varepsilon,N}(x)\}$，其中 C_0 为一待定常数。容易看出：当取 C_0 足够大时，有

$$\int_{E^c_\varepsilon}\{u^*_{\varepsilon,N}(x)\}^p\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{C_0^p}\int_{E^c_\varepsilon}\{U^*_{\varepsilon,N}(x)\}^p\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\{u^*_{\varepsilon,N}(x)\}^p\,\mathrm{d}x.$$

由此推出

$$\int_{\mathbb{R}^n}\{u^*_{\varepsilon,N}(x)\}^p\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{E_\varepsilon}\{u^*_{\varepsilon,N}(x)\}^p\,\mathrm{d}x.$$

因此，为证(2.1)式，只需证明

$$\int_{E_\varepsilon}\{u^*_{\varepsilon,N}(x)\}^p\,\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}\{\varphi^*_+(f)(x)\}^p\,\mathrm{d}x,$$

而后一式可由不等式

$$u^*_{\varepsilon,N}(x)\leqslant C\{HL[\varphi^*_+(f)]^r(x)\}^{1/r},\ 当\ x\in E_\varepsilon, \tag{2.4}$$

和 HL 极大函数的性质直接推得，其中 $0<r<p$。因此，余下只需证明(2.4)式。设 $x\in E_\varepsilon$，由 $u^*_{\varepsilon,N}(x)$ 的定义，存在 $(y,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$，使得 $|x-y|<t<1/\varepsilon$，以及

$$|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^N(1+\varepsilon|y|)^{-N}>u^*_{\varepsilon,N}(x)/2.$$

但由 E_ε 的定义可知，当 $x\in E_\varepsilon$ 时，有

$$t|\nabla_z(f*\varphi_t)(z)|\leqslant C_0\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{-N}(1+\varepsilon|y|)^N u^*_{\varepsilon,N}(x),$$
$$当\ |x-z|<t.$$

由以上两式便得到

$$t|\nabla_z(f*\varphi_t)(z)|\leqslant C_1|(f*\varphi_t)(y)|,\ 当\ |x-z|<t.$$

但由中值定理可知

$$|(f*\varphi_t)(w)-(f*\varphi_t)(y)|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}|(f*\varphi_t)(y)|,$$
$$当\ w\in B(x,t)\cap B(y,t/2C_1).$$

故当 $w\in B(x,t)\cap B(y,t/2C_1)$ 时，有

$$|(f*\varphi_t)(w)|\geqslant\frac{1}{2}|(f*\varphi_t)(y)|>\frac{1}{4}u^*_{\varepsilon,N}(x),$$

其中 $x\in E_\varepsilon$。最后，不难看出：当 $x\in E_\varepsilon$ 时，

$$HL[\varphi_+^*(f)]^r(x)\geqslant\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}\{\varphi_+^*(f)(w)\}^r\mathrm{d}w$$

$$\geqslant\frac{1}{|B(x,t)|}\cdot\int_{B(x,t)\cap B(y,t/2C_1)}|(f*\varphi_t)(w)|^r\mathrm{d}w$$

$$\geqslant C\{u_{\varepsilon,N}^*(x)\}^r.$$

于是，(2.4)式获证，引理证毕。

由引理2.2和引理2.3直接推出 $P_\nabla^*(f)(x)$ 同 $\varphi_\nabla^*(f)(x)$ 之间的一种关系。

命题 2.1 若 $P_\nabla^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$0<p<\infty$，则存在一$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1,\ \varphi_\nabla^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n),$$

以及

$$\|\varphi_\nabla^*(f)\|_p\leqslant C_{p,n}\|P_\nabla^*(f)\|_p.$$

§3 Grand 极大函数

在上一节中已经提到，C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1] 证明了定义1.1中的 Poisson 核 P 可以换成某一规范的光滑函数 φ（关于这一点，将在本节最后得到证实），即可以对某一 $\varphi\in\mathscr{S}$，用 $\varphi_\nabla^*(f)$ 来代替定义1.1中的 $P_\nabla^*(f)$。[FS 1]还进一步指出：既可以考虑某一光滑函数 φ，也可以对某一光滑函数类 K_m 来考虑 $P_\nabla^*(f)$ 的代替物，意即可以用 $\sup\limits_{\varphi\in K_m}\varphi_\nabla^*(f)$ 来代替定义1.1中的 $P_\nabla^*(f)$，其中 K_m 为一适当的光滑函数类。

定义 3.1 设 $m\in\mathbb{N}$。如记

$$K_m=\{\Phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n):\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant m}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\Phi(u)|\leqslant1\},$$

则称 $f_m^*(x)=\sup\limits_{\Phi\in K_m}\Phi_\nabla^*(f)(x)$ 为 f 的 Grand 极大函数。

为方便起见，记

$$\|\Phi\|_{K_m}=\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant m}(1+|u|)^{m+n}|D^\alpha\Phi(u)|.$$

此时，$f_m^*(x)$ 可写成

$$f_m^*(x)=\sup_{\|\Phi\|_{\mathscr{S}^m}\leq 1}\Phi_\nabla^*(f)(x).$$

在第 2 章里，将看到 $f_m^*(x)$ 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解结构理论中起重要的角色，而本节只研究 $f_m^*(x)$ 同 $\varphi_\nabla^*(f)(x)$ 及 $P_\nabla^*(f)(x)$ 之间的关系. 下面，首先指出切向极大函数

$$\varphi_T^\lambda(f)(x)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n,t>0}|(f*\varphi_t)(y)|\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^\lambda$$

沟通了 $f_m^*(x)$ 同 $\varphi_\nabla^*(f)(x)$ 之间的关系.

引理 3.1 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，$0<p<\infty$，以及 $\lambda>n/p$. 若 $\varphi_\nabla^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，则 $\varphi_T^\lambda(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|\varphi_T^\lambda(f)\|_p\leq C_{p,n}\|\varphi_\nabla^*(f)\|_p.$$

证明 记 $q=n/\lambda$. 由 $\varphi_\nabla^*(f)(z)$ 的定义可知

$$|(f*\varphi_t)(y)|\leq\varphi_\nabla^*(f)(z),\ \text{当}\ z\in B(y,t).$$

注意到 $B(y,t)\subset B(x,|x-y|+t)$，便有

$$|(f*\varphi_t)(y)|^q\leq\frac{1}{|B(y,t)|}\int_{B(y,t)}\{\varphi_\nabla^*(f)(z)\}^q\mathrm{d}z$$

$$\leq C\left(\frac{|x-y|+t}{t}\right)^n HL[\varphi_\nabla^*(f)]^q(x).$$

由此推出

$$\{\varphi_T^\lambda(f)(x)\}^q\leq CHL[\varphi_\nabla^*(f)]^q(x).$$

注意到 $q<p$，则由上式以及 HL 极大函数的性质便得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\{\varphi_T^\lambda(f)(x)\}^p\mathrm{d}x\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\{HL[\varphi_\nabla^*(f)]^q(x)\}^{p/q}\mathrm{d}x$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\{\varphi_\nabla^*(f)(x)\}^p\mathrm{d}x.$$

引理证毕.

引理 3.2 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，则对任一 $\lambda\in N$，有

$$f_m^*(x)\leq C\varphi_T^\lambda(f)(x),$$

其中常数 C 同 f、x 无关，而 $m\geq\lambda+1$.

证明 设$\Phi\in\mathscr{S}$，由引理2.1(i)可知

$$\Phi=\int_0^1\varphi_s*\theta^{(s)}\mathrm{d}s.$$

于是，当$|x-y|<t$时，

$$\begin{aligned}|(f*\Phi_t)(y)|&\leqslant\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\varphi_{st})(y-z)||\theta^{(s)}(z/t)|t^{-n}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\\&\leqslant\varphi_{\lambda,T}^{*}(f)(x)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x-y+z|+st}{st}\right)^{\lambda}\\&\quad\cdot|\theta^{(s)}(z/t)|t^{-n}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\\&\leqslant2^{\lambda}\varphi_{\lambda,T}^{*}(f)(x)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}s^{-\lambda}(1+|w|)^{\lambda}\\&\quad\cdot|\theta^{(s)}(w)|\mathrm{d}w\,\mathrm{d}s\leqslant C\|\Phi\|_{K_m}\varphi_{\lambda,T}^{*}(f)(x).\end{aligned}$$

上述最后一步用到了引理2.1(ii)(由引理2.1的证明可知，需取$m\geqslant\lambda+1$)，证毕。

由引理3.1和引理3.2便推得

命题3.1 设$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，$0<p<\infty$，以及$m>1+n/p$。若$\varphi_{\nabla}^{*}(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，则$f_m^{*}\in L^p(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f_m^{*}\|_p\leqslant C_{p,n}\|\varphi_{\nabla}^{*}(f)\|_p.$$

下面，还要建立$f_m^{*}(x)$同$P_{\nabla}^{*}(f)(x)$之间的关系。

命题3.2 设$0<p<\infty$。若$f_m^{*}\in L^p(\mathbb{R}^n)$，则存在一同$f$、$x$无关的常数$C$，使得

$$P_{\nabla}^{*}(f)(x)\leqslant Cf_m^{*}(x).$$

证明 任取一$\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，满足

$$\psi(y)=\begin{cases}1,&\text{当}|y|<1,\\0,&\text{当}|y|>2.\end{cases}$$

如记$P^\delta(y)=\psi(\delta y)P(y)$，以及$\delta_k=2^{-k}$，则

$$P(y)=P^{\delta_0}(y)+\sum_{k=1}^{\infty}\{P^{\delta_k}(y)-P^{\delta_{k-1}}(y)\}\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}P^{(k)}(y).$$

于是，当$|x-y|<t$时，

$$|(f*P_t)(y)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|(f*P_t^{(k)})(y)|$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}|(f*Q_{2^k t})(y)|,$$

其中 $Q(u)=\{\psi(u)-\psi(2u)\}P(u)$。因此，当 $|x-y|<t$ 时，有

$$|(f*P_t)(y)|\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}f_m^*(x)\|Q\|_{*_m}.$$

注意到 $Q\in\mathscr{S}$，便知命题的结论成立。

由命题2.1，命题3.1，以及命题3.2便直接推得下面属于C. Fefferman 和 E. M. Stein 的基本结果。

定理 3.1 设 $f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，$0<p<\infty$，以及 $m>1+n/p$，则下列几个事实互相等价：

(i) $f\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$；

(ii) 存在某一 $\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，使得 $\varphi_\nabla^*(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$；

(iii) $f_m^*\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$。

下面，将对 f_m^* 作进一步的讨论。首先，给出算子之型的概念。假设算子 T 将 $\boldsymbol{R}^n$ 上的复值可测函数映射成复值可测函数。如果 T 满足条件

$$|T(f_1+f_2)(x)|\leqslant|T(f_1)(x)|+|T(f_2)(x)|,\ x\in\boldsymbol{R}^n,$$

则称算子 T 为次线性的。又设 X 为一拟范线性空间。如果 T 映射 X 到 L^p 内，并满足

$$\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_X,$$

其中 C 与 f 无关，则称算子 T 为 (X, L^p) 型的。如果上述不等式被下式

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:|Tf(x)|>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_X/\lambda)^p$$

代替的话，其中 C 与 f、λ 无关，则称算子 T 为弱 (X, L^p) 型的。定理 3.1 表明，极大算子 $T: f\to f_m^*$，是 (H^p, L^p) 型的。下面将指出：当 $p\geqslant1$ 时，此极大算子的型有进一步的结论。

命题 3.3 设 $m\geqslant1$，$p>1$，则成立

(i) 算子 $T: f\mapsto f_m^*$，为弱 (L^1, L^1) 型的；

(ii) 算子 $T: f\mapsto f_m^*$，为 (L^p, L^p) 型的。

证明 显然，T 为(L^∞, L^∞)型的，故使用 Marcinkiewicz 算子插值定理，(ii)的结论可由(i)直接推出。为此，只需证明(i)。设$|x-y|<t$，并任取一$\Phi\in K_m$。显然，

$$|(f*\Phi_t)(y)|\leqslant t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|\left|\Phi\left(\frac{y-z}{t}\right)\right|dz.$$

如记 $E_0(y)=\{z: |y-z|<t\}$，以及

$$E_k(y)=\{z: 2^{k-1}t\leqslant|y-z|<2^k t\},$$

$k\in N$，则由上式及 $\Phi\in K_m$ 不难推出，

$$\begin{aligned}|(f*\Phi_t)(y)|&\leqslant t^{-n}\left\{\int_{E_0(y)}|f(z)|dz+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(k-1)(m+n)}\right.\\&\quad\left.\cdot\int_{E_k(y)}|f(z)|dz\right\}\\&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-km}(2^k t)^{-n}\int_{B(y,2^k t)}|f(z)|dz\\&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-km}(2^{k+1}t)^{-n}\int_{B(x,2^{k+1}t)}|f(z)|dz\\&\leqslant CHL(f)(x).\end{aligned}$$

由此推出

$$f_m^*(x)\leqslant CHL(f)(x).$$

现在，(i)的结论可由上式及 HL 极大函数的性质推出，证毕。

作为定理 3.1 和命题 3.3 的直接结果，不难证明如下的推论：

推论 3.1 设$1<p<\infty$，则 $H^p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$。

因此，对于实 H^p 空间，感兴趣的情形是$0<p\leqslant 1$。

注 3.1 从定理 3.1 的证明中不难看出。下列事实互相等价：

(1) $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$；

(2) 存在一 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\int\varphi(x)dx=1$，使得

$$\varphi_+^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n);$$

(3) 存在一 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\int\varphi(x)dx=1$，使得

$$\varphi_\nabla^*(f)\in L^p(\mathbb{R}^n);$$

(4) $F_+^{**}(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$；

(5) $f_m^{**}\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

此外，C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1]还借助于 f 的面积函数 $S(f)$ 来刻划 $H^p(\mathbb{R}^n)$. 精确地说，上述任一事实又等价于下面的

(6) $S(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}(f*P_t)(x)=0$，其中

$$S(f)(x)=\left\{\iint\limits_{\Gamma(x)}|\nabla(f*P_t)(y)|^2t^{1-n}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2},$$

及 $$\Gamma(x)=\{(y,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:|y-x|<t\}.$$

注 3.2 对于周期情形，实 $H^p(T^n)$ 空间可以类似地定义。设周期缓增广义函数 f 具有形式上的 Fourier 展开

$$f(x)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k(f)e^{2\pi ik\cdot x}.$$

如果采用注 3.1 中的(4)作为周期情形下 H^p 空间的定义方式，那末称 $f\in H^p(T^n)$，是指

$$P_+^{**}(f)(x)\triangleq\sup_{t>0}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{P}(tk)a_k(f)e^{2\pi ik\cdot x}\Big|\in L^p(T^n).$$

同样可以证明，$H^p(T^n)$ 也有其它等价的实变特征。例如，上述定义中的 Poisson 核 P 可以用任一 $\varphi\in\mathscr{S}$ 来代替，其中

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1.$$

其次，也可以证明：当 $1<p<\infty$ 时，$H^p(T^n)=L^p(T^n)$.

注 3.3 关于 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的实变特征，除了注 3.1 中所列举的，还有其它的结果。例如，A. Uchiyama[UC 1] 得到了 H^p 的广义 Littlewood-Paley g 函数特征。S. Semmes [Se 1]得到了 H^p 的调和函数新特征。S. Y. A. Chang, Z.Ciesielski[CC 1]的 $H^1(\mathrm{T})$ 的样条函数特征。J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz, J. L. Torrea [RRT 1]得到了 H^1 的平方函数特征。此外，Y. Meyer [Me 1]给出了 H^1 的小波特征，而它实际上是一类离散型的极大函数特征。

注 3.4 A. Miyachi[Mi 2] 定义了区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的 Hardy

空间 $H^p(\Omega)$。精确地表达如下：设

$$\varphi\in C_0^\infty(R^n),\ \mathrm{Supp}\ \varphi\subset\{x\in R^n:\ |x|<1\},$$

且
$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1.$$

又设 Ω 为 R^n 中的开子集，对任一 $f\in\mathscr{S}'(R^n)$，定义一径向极大函数

$$\varphi_\Omega^+(f)(x)=\sup\{|\langle f,\ \varphi_t(x-\cdot)\rangle|:0<t<\mathrm{dist}(x,\ \Omega^C)\}.$$

称 $f\in H^p(\Omega)$，是指 $\varphi_\Omega^+(f)\in L^p(\Omega)$。

评注与参考文献

§1 关于空间 $H^p(\mathbf{R}_+^{n+1})$的定义，首先见于 E. M. Stein, G. Weiss[SW 1]，也可参见 E. M. Stein, G. Weiss[SW2, 第六章].

§2 本节内容的处理和安排在细节上同 C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1] 略有不同. 例如，引理 2.1 及其证明取材于 G. B. Folland, E. M. Stein [FOS 1]. 引理 2.2 的证明，原文[FS 1]有笔误，现已改正。

§3 C. Fefferman, E. M. Stein[FS 1]对命题 3.2 的证明，不十分严谨，这里是经适当修正后得到的。

第 2 章

$H^p(\mathbb{R}^n)$空间的分解结构理论

§1 原　　子

$H^p(\mathbb{R}^n)$ 空间实变理论的深入发展的一个标志就是它的原子分解结构理论的建立。R. R. Coifman [Co 1]首先使用了Grand极大函数把 $H^p(\mathbb{R})$ 的元素表示成一列基本元素的叠加。研究 $H^p(\mathbb{R})$ 上的某些分析问题被归结于这些基本元素上的某种性质，从而使问题变得简单了。这些基本元素被称为原子。现在，首先给出原子的概念。

定义 1.1　设 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，非负整数

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$$

（记号$[x]$为 x 的整数部份）。如果函数 $a(x)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ 满足下列条件

(i) $\operatorname{supp} a\subset B(x_0, r)$；

(ii) $\|a\|_q\leqslant|B(x_0, r)|^{1/q-1/p}$；

(iii) $\int a(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0$, $0\leqslant|\alpha|\leqslant s$；

则称 $a(x)$ 为中心在 x_0 处的(p, q, s)原子。这里，(i)表明原子是具有紧支集的函数；(ii)是原子的尺寸条件；而(iii)叫做原子的消失矩条件。此外，这里的 $B(x_0, r)$ 是以 x_0 为中心、r 为半径的球体。

显然，(p, ∞, s)原子必是(p, q, s)原子，$p<q<\infty$。现在，定义一类由原子生成的函数空间。

定义 1.2　原子 Hardy 空间 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ 由下述方式定义：

$$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n):\ f(x)\overset{s'}{=}\sum_k\lambda_k a_k(x),$$

$$\text{每一 } a_k(x) \text{ 为 } (p,\ q,\ s) \text{ 原子，且 } \sum_k|\lambda_k|^p<\infty\}.$$

如置 $\|f\|_{H_a^{p,q,s}}=\inf(\sum_k|\lambda_k|^p)^{1/p}$，其中下确界是对 f 的一切分解 $f=\sum_k\lambda_k a_k$ 而取的，则不难证明，$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ 依距离

$$\rho(f,\ g)=\|f-g\|_{H_a^{p,q,s}}$$

构成一完备的度量空间。特别地，$H_a^{1,q,s}(\mathbb{R}^n)$ 为 Banach 空间。R. R. Coifman[Co 1] 证明了 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R})=H^p(\mathbb{R})$。这表明$H^p(\mathbb{R})$中的任一元素可以表示成一列原子依某种形式的叠加。现在，来陈述 Coifman 定理：

定理 1.1　设 $0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，以及非负整数 $s\geqslant\left[\frac{1}{p}-1\right]$，则 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R})=H^p(\mathbb{R})$，且

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}}\sim\|f\|_{H^p}.$$

在证明定理 1.1 之前，先建立一个辅助引理。

引理 1.1　设区域 $G\supset Q=\{x+iy\in\mathbb{C}:x_0\leqslant x\leqslant x_0+h,\ y_0\leqslant y\leqslant y_0+h\}$。若 u 在 G 内调和，则

$$\int_{x_0}^{x_0+h}\{u(x+iy_0)+u[x+i(y_0+h)]\}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{y_0}^{y_0+h}\{u(x_0+iy)+u(x_0+h+iy)\}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^h\{u[x_0+t+i(y_0+t)]+u[x_0+t+i(y_0+h-t)]\}\mathrm{d}t.$$

证明　不失一般性，可设 $(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$，以及 $h=1$。记 v 为 u 的共轭调和函数，并置

$$f_k=i^k(1+i)(u+iv),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

又记 $\Delta(A、B、C)$ 为复平面上由 $A、B、C$ 三点所构成的三角形闭合线。由解析函数积分的 Cauchy 定理，得

$$\oint_{\Delta_k}f_k(z)\mathrm{d}z=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

其中 $\Delta_0=\Delta(i,0,1)$，$\Delta_1=\Delta(1+i,i,0)$，$\Delta_2=\Delta(1,1+i,i)$，以及 $\Delta_3=\Delta(0,1,1+i)$。特别地，有

$$\mathrm{Re}\left(\oint_{\Delta_k} f_k(z)dz\right)=0,\ k=0,1,2,3.$$

将以上四式相加便得到引理结论中的等式。证毕。

定理 1.1 的证明　为简便之计，这里只对 $p=1$, $s=0$ 的情形给出证明。设 $a(x)$ 为任一 $(1,q,0)$ 原子，即 a 满足

(i) $\mathrm{supp}\, a\subset I=\{x;\ |x-x_0|<r\}$；

(ii) $\|a\|_q\leqslant(2r)^{\frac{1}{q}-1}$；

(iii) $\int a(x)\mathrm{d}x=0$。

如记 $\tilde{a}$ 为 a 的 Hilbert 变换，并写着

$$\int_{\mathbb{R}}|\tilde{a}(x)|\mathrm{d}x=\int_{|x-x_0|<2r}|\tilde{a}(x)|\mathrm{d}x+\int_{|x-x_0|>2r}|\tilde{a}(x)|\mathrm{d}x,$$

则由 Hilbert 变换在 $L^q(\mathbb{R})(q>1)$ 上的有界性，可得

$$\int_{|x-x_0|<2r}|\tilde{a}(x)|\mathrm{d}x\leqslant Cr^{1/q'}\|a\|_q\leqslant C,$$

其中 $1/q+1/q'=1$。其次，由(iii)可得

$$\begin{aligned}&\int_{|x-x_0|>2r}|\tilde{a}(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{|x-x_0|>2r}\left|\int_{|y-x_0|<r}\left\{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-x_0}\right\}a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{|x-x_0|>2r}|x-x_0|^{-2}\left(\int_{|y-x_0|<r}|y-x_0||a(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant C.\end{aligned}$$

于是，$\tilde{a}\in L(\mathbb{R})$，且 $\|\tilde{a}\|_1\leqslant C$，其中常数 C 与 a 无关。今设 $f\in H_a^{1,q,0}(\mathbb{R})$，此即 $f(x)=\sum_k\lambda_k a_k(x)$，其中每一 a_k 为 $(1,q,0)$ 原子，且 $\sum_k|\lambda_k|<\infty$。由上面对 $\tilde{a}$ 已证得的结论可推出

$$\|\tilde{f}\|_1\leqslant C\sum_k|\lambda_k|.$$

一个已知的结果表明 $f\in H^1(\mathbb{R})$（参见 Y. Katznelson [Ka 1, p.87]）。因此，$H_a^{1,q,0}(\mathbb{R})\subset H^1(\mathbb{R})$，以及

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant C\|f\|_{H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})}.$$

下面，将证反向包含关系 $H^1(\mathbb{R})\subset H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$。设 $f\in H^1(\mathbb{R})$，并记 $u(x, y)=(f*P_y)(x)$，$y>0$。又记 $\Omega_k=\{x: P_\nabla^*(f)(x)>2^k\}$，$k\in\mathbb{Z}$。由于 Ω_k 为一 $\mathbb{R}$ 中的开集，故它可表示成

$$\Omega_k=\bigcup_j I_j^{(k)},$$

其中 $\{I_j^{(k)}\}_j$ 为一列互不相交的开区间。现在，对 f 作如下的分解：

$$f(x)=g_k(x)+b_k(x),$$

其中

$$g_k(x)=\sum_j[f(x)-f_{I_j^{(k)}}]\mathscr{X}_{I_j^{(k)}}(x),$$

以及

$$b_k(x)=f(x)\mathscr{X}_{\Omega_k^c}(x)+\sum_j f_{I_j^{(k)}}\mathscr{X}_{I_j^{(k)}}(x),$$

其中 $\mathscr{X}_E$ 为 E 的特征函数，$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(t)\mathrm{d}t$。下面，首先证明

$$\lim_{k\to-\infty}g_k(x)=f(x),\ \text{a. e.} \tag{1.3}$$

事实上，由调和函数的非切向收敛性，可知

$$|f(x)|\leqslant P_\nabla^*(f)(x),\ \text{a. e.}$$

为方便起见，记 $I_j^{(k)}=I=(a, b)$，并以 I 为底边在上半平面 $\mathbb{R}_+^2$ 内作一正方形 Q，Q 的另外三边分别记作 l_1、l_2 和 l_3，而 Q 的两条对角线记作 d_1 和 d_2。此外，d_1、d_2，以及 I 所围成的三角形区域记作 Δ。由于 $a\notin\Omega_k$，$b\notin\Omega_k$，以及 $Q\backslash\Delta\subset\Gamma(a)\cup\Gamma(b)$，其中

$$\Gamma(a)=\{(x, y)\in\mathbb{R}_+^2: |x-a|<y\},$$

以及

$$\Gamma(b)=\{(x, y)\in\mathbb{R}_+^2: |x-b|<y\}.$$

不难看出

$$|u(x, y)|\leqslant\max\{P_\nabla^*(f)(a), P_\nabla^*(f)(b)\}\leqslant 2^k,$$

当 $(x, y)\in Q\backslash\Delta$。由此推出

$$\frac{1}{|I|}\left|\int_{l_j}u\right|\leqslant 2^k,\ j=1, 2, 3.$$

如将 Q 向上平移 ε 个单位后的正方形记作 Q_ε，而其它记号均不变，则同样有

$$\frac{1}{|I|}\left|\int_{d_s}u\right|\leqslant\sqrt{2}\,2^k,\ s=1,\ 2.$$

现在，对 Q_ε 使用引理 1.1 (取 $x_0=a$, $h=b-a$, 及 $y_0=\varepsilon$)，便得

$$\int_a^b u(x,\ \varepsilon)\mathrm{d}x=2\left(\int_{d_1}u+\int_{d_2}u\right)-\left(\int_{l_1}u+\int_{l_2}u+\int_{l_3}u\right).$$

由此推出

$$\left|\int_a^b u(x,\ \varepsilon)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 9\cdot 2^k|I|.$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理，便得到

$$\frac{1}{|I|}\left|\int_I f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 9\cdot 2^k.$$

但由 $b_k(x)$ 的定义及上式，有

$$|b_k(x)|\leqslant 9\cdot 2^k.$$

显然，上式蕴含着(1.1)式成立。其次，由 $P_\nabla^*(f)\in L^1(\boldsymbol{R})$ 可知

$$\lim_{k\to\infty}|\Omega_k|=0.$$

此表明

$$\lim_{k\to+\infty}g_k(x)=0,\ \text{a. e.}\tag{1.2}$$

由(1.1)式和(1.2)式，$f(x)$ 可写成

$$f(x)=\lim_{N,M\to\infty}\sum_{k=-M}^{N}\{g_k(x)-g_{k+1}(x)\},\ \text{a. e.}\tag{1.3}$$

如注意到 $P_\nabla^*(f)\in L^1(R)$，以及

$$\begin{aligned}|g_k(x)|&\leqslant\sum_j\{|f(x)|+|f_{I_j^{(k)}}|\}\mathscr{X}_{I_j^{(k)}}(x)\\&\leqslant\sum_j\{P_\nabla^*(f)(x)+9\cdot 2^k\}\mathscr{X}_{I_j^{(k)}}(x)\\&\leqslant 10P_\nabla^*(f)(x),\ \text{a. e.},\end{aligned}$$

则由 Lebesgue 控制收敛定理可知，(1.3) 式在 L^1 中也成立。下面，由(1.3)式不难得到 f 的一种原子分解式。事实上，如置

$$a_j^{(k)}(x)=\frac{1}{\lambda_j^{(k)}}\{g_k(x)-g_{k+1}(x)\}\mathscr{X}_{I_j^{(k)}}(x),$$

其中 $\lambda_j^{(k)}=27\cdot|I_j^{(k)}|\cdot 2^k$，则

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_j\lambda_j^{(k)}a_j^{(k)}(x),$$

因(1.3)式在 L^1 中成立，故上式在 $\mathscr{S}'$ 中成立。此外，不难验证 $\operatorname{supp}a_j^{(k)}\subset I_j^{(k)}$，$|a_j^{(k)}(x)|\leqslant|I_j^{(k)}|^{-1}$，以及

$$\int a_j^{(k)}(x)\mathrm{d}x=0.$$

因此，$f\in H_a^{1,\infty,0}(R)$。于是，$H^1(R)\subset H_a^{1,\infty,0}(R)$。此外，由不等式

$$\sum_{j,k}|\lambda_j^{(k)}|\leqslant C\sum_k 2^k|\Omega_k|\leqslant C\int_R P_\nabla^*(f)(x)\mathrm{d}x,$$

可得 $\|f\|_{H_a^{1,\infty,0}}\leqslant C\|f\|_{H^1}$，定理证毕。

§2　$H^1(R^n)$ 的对偶空间

C. Fefferman [Fe 1] 和 C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1] 分别在 $n=1$ 和 $n>1$ 的情形证明了如下的结果：$H^1(R^n)$ 的对偶空间就是 F. John, L. Nirenberg [JN 1] 在研究椭圆型偏微分方程正则解时所引进的有界平均振动函数空间。

定义 2.1　设 $f(x)$ 为定义于 R^n 上的局部可积函数，Q 为 R^n 中的任一立方体，$f(x)$ 在 Q 上的平均值记作

$$f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x,$$

以及 $1\leqslant q<\infty$。若 $f(x)$ 满足条件

$$\sup_Q\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}<\infty,$$

则称 $f(x)$ 为 q 次有界平均振动函数，一切 q 次有界平均振动函数所构成的空间记作 BMO_q。当 $q=1$ 时，简记它为BMO，并称它为有界平均振动函数空间。

以下，首先对 BMO 进行某些必要的说明。显然，$L^\infty(\mathbb{R}^n)\subset$ BMO$(\mathbb{R}^n)$，且这个包含关系是严格的。事实上，$\log|x|\in$ BMO$\backslash L^\infty$。对任一 $f\in$ BMO，如定义

$$\|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\mathrm{d}x,$$

则不难证明 $\|\cdot\|_*$ 为一准范数。事实上，$\|f\|_*=0$ 当且仅当 f 为一常数。因此，当 BMO 中两函数相差一常数时，如将它们看成等同的话，那末 BMO 便成为一 Banach 空间。

下面，为进一步揭示 BMO 的特征，先引入一个十分重要的 Calderón-Zygmund 分解引理，它在现代调和分析中是一个基本工具。

引理 2.1 (Calderón-Zygmund 分解) 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则对任一 $\lambda>0$，存在一 $\mathbb{R}^n$ 的分解：$\mathbb{R}^n=Q^\lambda\cup P^\lambda$，它满足以下性质：

(i) $Q^\lambda=\bigcup\limits_1^\infty Q_k^\lambda$，其中 Q_k^λ 互不重叠，且

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda,$$

(ii) $|f(x)|\leqslant\lambda$, a. e. $x\in P^\lambda$。

证明 首先将 $\mathbb{R}^n$ 分成边长相等，其边平行于坐标轴的立方体之并。显然，当边长足够大时，使得对上述任一立方体 Q，均有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\lambda.$$

其次，对上述的每一立方体 Q，二等分其边后得到 2^n 个小立方体 $\{Q'\}$。对任一 $Q'\in\{Q'\}$，必满足下列两种情形之一：

(1) $\dfrac{1}{|Q'|}\displaystyle\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\lambda$;

(2) $\dfrac{1}{|Q'|}\displaystyle\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x>\lambda$.

将满足情形(2)的 Q' 归入 Q^λ 中，而对满足情形(1)的 Q'，再二等分其边后又得到 2^n 个小立方体 $\{Q''\}$，同样，对任一 $Q''\in\{Q''\}$，也必满足情形(1)或(2)。于是，仍可依上述的方法来对 Q'' 分类，

而且这样的构作过程可以类似进行下去。显然，$Q^\lambda=\bigcup_k Q_k^\lambda$ 中的立方体互不重叠，而且满足

$$\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|dx>\lambda.$$

注意到满足情形(2)的任一立方体 Q_k^λ 必是满足情形(1) 的某一立方体 $\overline{Q}_i^\lambda$ 二等分边长后所产生的 2^n 个小立方体中的一个。因此，

$$\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|dx<\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{\overline{Q}_i^\lambda}|f(x)|dx$$
$$=\frac{2^n}{|\overline{Q}_i^\lambda|}\int_{\overline{Q}_i^\lambda}|f(x)|dx<2^n\lambda.$$

于是，(i)成立。

对任一 $x\in P^\lambda=\mathbb{R}^n\backslash Q^\lambda$，必存在一列满足情形 (1) 的立方体 $\{Q_m\}$，使得 $Q_m\ni x$，以及 $|Q_m|\to 0$，当 $m\to\infty$。由 Lebesgue 微分定理，便得

$$|f(x)|\overset{\text{a. e.}}{=\!=}\lim\frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m}|f(t)|dt\leqslant\lambda.$$

因此，(ii)成立，证毕。

如记 $\mu_Q(\alpha)=|\{x\in Q: |f(x)-f_Q|>\alpha\}|$，则

$$\int_Q|f(x)-f_Q|dx=\int_0^\infty\mu_Q(\alpha)d\alpha.$$

由此推出：若 $\mu_Q(\alpha)$ 满足不等式

$$\mu_Q(\alpha)\leqslant B|Q|e^{-b\alpha},\ \forall Q,$$

其中常数 B 和 b 同 Q 无关，则 $f\in\mathrm{BMO}$。有趣的是，F. John, L. Nirenberg [JN 1] 指出：上面 $\mu_Q(\alpha)$ 所满足的不等式本质上成为刻画 BMO 中函数的特征。

命题 2.1 存在常数 B 和 b，使得对任一 $f\in\mathrm{BMO}$，任一立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$，以及任一 $\alpha>0$，有

$$\mu_Q(\alpha)\leqslant B|Q|\exp(-b\alpha/\|f\|_*).$$

证明 不妨设 $\alpha\geqslant\|f\|_*$（否则，取 B 和 b，使得 $Be^{-b}\geqslant 1$）。还不妨设 $\|f\|_*=1$（一个简单的变换，可归结于 $\|f\|_*=1$ 的情形）。任取一 Q_0，并不妨设 $f_{Q_0}=0$（否则，考虑 $g=f-f_{Q_0}$）。记 $\mu_{Q_0}(\alpha)$

$=|\{x\in Q_0:|f(x)|>\alpha\}|\triangle|E_\alpha|$。对任一 $\lambda\geqslant\|f\|_*=1$，显然有

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(x)|dx\leqslant\lambda.$$

如重复引理 2.1 的证明，则可得 Q_0 的一种分解：

$$Q_0=P^\lambda\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k^\lambda\right),$$

其中 $\{Q_k^\lambda\}_k$ 为一族互不重叠的立方体，并满足

$$|f(x)|\leqslant\lambda,\ \text{a. e. } x\in P^\lambda,$$

以及

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|dx.$$

根据构作 Q_k^λ 的过程，它是由某一立方体 $\overline{Q}_i^\lambda$ 的边二等分后所产生的 2^n 个小立方体中的一个，且满足

$$\frac{1}{|\overline{Q}_i^\lambda|}\int_{\overline{Q}_i^\lambda}|f(x)|dx\leqslant\lambda.$$

由此推出

$$\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|dx\leqslant\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)-f_{\overline{Q}_i^\lambda}|dx+|f_{\overline{Q}_i^\lambda}|$$
$$\leqslant2^n\|f\|_*+\lambda=2^n+\lambda.$$

设 $\nu>\lambda$，对此 ν，同样产生 Q_0 的一个分解：

$$Q_0=P^\nu\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j^\nu\right).$$

不难看出

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j^\nu\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k^\lambda.$$

因此，任一 Q_j^ν 必包含在某一 Q_k^λ 之中。如取 $\nu=\lambda+2^{n+1}$，并记

$$Q_{j,k}^{\nu,\lambda}=\bigcup_{(j:Q_j^\nu\subset Q_k^\lambda)}Q_j^\nu,$$

则由不等式

$$\lambda+2^{n+1}=\nu<\frac{1}{|Q_{j,k}^{\nu,\lambda}|}\int_{Q_{j,k}^{\nu,\lambda}}|f(x)|dx$$
$$\leqslant\frac{1}{|Q_{j,k}^{\nu,\lambda}|}\int_{Q_{j,k}^{\nu,\lambda}}|f(x)-f_{Q_k^\lambda}|dx+|f_{Q_k^\lambda}|$$

$$\leqslant \frac{|Q_k^\lambda|}{|Q_{j,k}^{\nu,\lambda}|}\|f\|_* + 2^n + \lambda = \frac{|Q_k^\lambda|}{|Q_{j,k}^{\nu,\lambda}|} + 2^n + \lambda,$$

推得

$$|Q_{j,k}^{\nu,\lambda}| \leqslant 2^{-n}|Q_k^\lambda|.$$

因此，有

$$\sum_j |Q_j^\nu| \leqslant 2^{-n}\sum_k |Q_k^\lambda|, \text{ 当 } \nu - \lambda = 2^{n+1}. \tag{2.1}$$

注意到 $\alpha \geqslant \|f\|_* = 1$。如记 $r = [(\alpha - 1)/2^{n-1}]$（这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分），以及 $\nu = 1 + 2^{n-1}r$，则 $1 \leqslant \nu \leqslant \alpha$。因此，$E_\alpha \subset E_\nu$。又因 $|f(x)| \leqslant \nu$, a. e. $x \in P^\nu$，故 $E_\nu \subset \bigcup_j Q_j^\nu$。由此推出

$$|E_\alpha| \leqslant |E_\nu| \leqslant \sum_j |Q_j^\nu| \leqslant 2^{-rn}\sum_k |Q_k^1|,$$

其中最后一步使用了(2.1)式 r 次。上式表明

$$\mu_{Q_0}(\alpha) \leqslant 2^{-rn}|Q_0|.$$

最后，如取 $B = 2^{n(1+2^{-n-1})}$ 和 $b = \log 2^{n2^{-n-1}}$，便得

$$\begin{aligned} B|Q_0|\exp(-b\alpha) &= 2^n|Q_0|2^{n(1-\alpha)2^{-n-1}} \\ &\geqslant 2^n|Q_0|2^{-n(r+1)} \geqslant \mu_{Q_0}(\alpha). \end{aligned}$$

到此，命题证毕。

推论 2.1　设 $1 < q < \infty$，则 $\mathrm{BMO}_q = \mathrm{BMO}$。

证明　首先，对任一立方体 Q，由 Hölder 不等式得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\mathrm{d}x \leqslant \left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^q \mathrm{d}x\right\}^{1/q}.$$

因此，$\mathrm{BMO}_q \subset \mathrm{BMO}$。其次，由命题 2.1 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^q \mathrm{d}x &= \frac{q}{|Q|}\int_0^\infty \alpha^{q-1}\mu_Q(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &\leqslant Bq\int_0^\infty \alpha^{q-1}\exp(-b\alpha/\|f\|_*)\mathrm{d}\alpha = C_q\|f\|_*^q. \end{aligned}$$

因此，$\mathrm{BMO} \subset \mathrm{BMO}_q$，证毕。

关于 $H^1(\boldsymbol{R}^n)$ 的对偶空间的基本结果可表述如下。

定理 2.1　若 $g \in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$Lf = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

为 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函。反之，对任一$H^1(\mathbb{R}^n)$上的有界线性泛函 L，必存在一 $g\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$Lf=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in H^1(\mathbb{R}^n).$$

上述结果可简写成 $(H^1(\mathbb{R}^n))'=\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

证明 这里只对 $n=1$ 的情形给出证明，由定理1.1，只需证明$(H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R}))'=\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$。设 $g\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$。为证 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})\subset(H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R}))'$，由 Hahn-Banach 延拓定理，只需证明线性泛函

$$Lf=\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

在 $H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ 的某稠子集 D 上有界。

取 $D=H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})\cap L_0^\infty(\mathbb{R})$，其中 $L_0^\infty(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的有界可测函数之全体。由于形如 $\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda_k a_k(x)$ 的函数之全体在 $H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ 中稠密（其中每一 a_k 为 $(1,\infty,0)$ 原子），故 D 为 $H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ 的稠子集。

现在，置

$$g_N(x)=\begin{cases} N, & 当\ g(x)\geqslant N, \\ g(x), & 当\ |g(x)|<N, \\ -N, & 当\ g(x)\leqslant -N, \end{cases}$$

不难验证，当 N 充分大时，

$$\|g_N\|_*\leqslant 4\|g\|_*.$$

如取 $f(x)=\sum\limits_k \lambda_k a_k(x)\in D$，则

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g_N(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_k|\lambda_k|\cdot\left|\int_{\mathbb{R}} a_k(x)\{g_N(x)-(g_N)_{I_k}\}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\sum_k|\lambda_k|\,\|g_N\|_*,$$

其中 $\mathrm{supp}\,a_k\subset I_k$。因此，

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g_N(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 4\,\|f\|_{H_a^{1,\infty,0}}\|g\|_*,\ f\in D.$$

注意到当 $f\in D$ 及 $g\in\mathrm{BMO}$ 时，

$$|f(x)g_N(x)|\leqslant|f(x)g(x)|\in L(\mathbb{R}),$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理，便得到

$$\left|\int_{R} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 4\|f\|_{H_a^{1,\infty,0}}\|g\|_*,\ f\in D.$$

因此，包含关系 $\mathrm{BMO}(R)\subset(H_a^{1,\infty,0}(R))'$ 成立。

为证反向的包含关系$(H_a^{1,q,0}(R))'\subset\mathrm{BMO}(R)$，$1<q<\infty$，可设$L$为 $H_a^{1,q,0}(R)$ 上的任一有界线性泛函，而需要证明：存在一$l\in\mathrm{BMO}(R)$，使得对任一 $f\in H_a^{1,q,0}(R)$，有

$$Lf=\int_{R} f(x)l(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\int_{R} a_k(x)l(x)\mathrm{d}x.$$

证明分成以下三个步骤进行。

(i) 先证 $(H_a^{1,q,0})'\subset(L_I^q)'$，其中 I 为一区间，以及

$$L_I^q=\{f\in L^q(I):\int_I f(x)\mathrm{d}x=0\}.$$

事实上，当 $f\in L_I^q$ 时，容易看出

$$a(x)\triangleq |I|^{\frac{1}{q}-1}\|f\|_{L^q(I)}^{-1}f(x)$$

为一$(1,\ q,\ 0)$原子，因此，$L_I^q\subset H_a^{1,q,0}$，而(i)成立。

作为 (i) 的直接结果，由 Hahn-Banach 延拓定理以及 Riesz 表现定理可知，存在一$l\in L^{q'}(I)$，$1/q+1/q'=1$，使得

$$Lf=\int_I f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L_I^q.$$

如取 $I_j\uparrow\mathbb{R}$，由已证的事实，则对每一 I_j，存在 $l_j\in L^{q'}(I_j)$，使得

$$Lf=\int_{I_j} f(x)l_j(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L_{I_j}^q. \tag{2.2}$$

(ii) 构造一l，使得对一切的 I_j，有

$$Lf=\int_{I_j} f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L_{I_j}^q.$$

设 $f\in L_{I_1}^q$，由(2.2)式可知存在一 $l_1\in L^{q'}(I_1)$，满足

$$Lf=\int_{I_1} f(x)l_1(x)\mathrm{d}x.$$

但 $f\in L_{I_1}^q\subset L_{I_2}^q$，如再一次使用(2.2)式，则可得一 $l_2\in L^{q'}(I_2)$，满足

$$Lf=\int_{I_1} f(x)l_2(x)\mathrm{d}x=\int_{I_1} f(x)l_2(x)\mathrm{d}x.$$

由以上两式得

$$\int_{I_1} f(x)\{l_1(x)-l_2(x)\}\mathrm{d}x=0,\ \forall f\in L^q_{I_1}.$$

如取 $f(x)=g(x)-g_{I_1}\in L^q_{I_1}$，其中 $g\in L^q(I_1)$，则上式可写成

$$\int_{I_1} g(x)\{[l_1(x)-l_2(x)]-(l_1-l_2)_{I_1}\}\mathrm{d}x=0,\ \forall g\in L^q(I_1).$$

由此推出

$$l_1(x)-l_2(x)=C_1(\text{Constant}),\ 当\ x\in I_1.$$

因此，如记

$$l(x)=\begin{cases} l_1(x),\ 当\ x\in I_1, \\ l_2(x)+C_1,\ 当\ x\in I_2\backslash I_1,\end{cases}$$

则有

$$l(x)=l_2(x)+C_1,\ 当\ x\in I_2.$$

不难验证，依此方法所得到的 $l(x)$ 满足

$$Lf=\int_{I_j} f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L^q_{I_j},\quad (j=1,\ 2).$$

同样，依完全类似的方法可得到一 $l(x)$，使得上式对任一 $j\in N$ 成立。因此，(ii)成立。

(iii) 最后证明上面(ii)中的 $l\in \mathrm{BMO}$，并满足

$$Lf=\int_{\mathbb{R}} f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in H_a^{1,q,0}(\mathbb{R}).$$

事实上，上面等式是(ii)和 $l\in\mathrm{BMO}$ 的直接结果，因此，以下只需证明 $l\in\mathrm{BMO}$。首先，由(ii)可知等式

$$La=\int a(x)l(x)\mathrm{d}x$$

对任一 $(1,\ q,\ 0)$ 原子 $a(x)$ 成立。设 I 为任一区间、$\mathrm{supp}\ h\subset I$，$h\in L^q(I)$，以及 $\|h\|_q=1$，则函数

$$a(x)=2^{-1}|I|^{1/q-1}\{h(x)-h_I\}\mathscr{X}_I(x)$$

为一 $(1,\ q,\ 0)$ 原子。因此，由 $L\in(H_a^{1,q,0})'$ 推出

$$\left|\int_I a(x)l(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|L\|.$$

上式可写成

$$|I|^{1/q-1}\left|\int_I h(x)\{l(x)-l_I\}\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\|L\|.$$

再由 $\|\cdot\|_{q'}$ 的定义便得

$$\left\{\frac{1}{|I|}\int_I |l(x)-l_I|^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'} \leqslant 2\|L\|.$$

此表明 $l\in \mathrm{BMO}_{q'}=\mathrm{BMO}$，证毕。

注 2.1　S. J. Berman [Be 1] 给出了 $\mathrm{BMO}(R^n)$ 的一个等价定义，即定义 2.1 中的 f_Q 用满足条件

$$\int_Q \{f(x)-P(x)\}x^\alpha \mathrm{d}x=0, \ |\alpha|\leqslant s$$

的 $P\in\mathscr{P}_s$ 代替后，所产生的函数空间仍为 $\mathrm{BMO}(R^n)$，其中 $\mathscr{P}_s$ 表示次数不超过 s 的多项式全体。

§3　原子分解结构

这一节里，将讨论一般的实 Hardy 空间 $H^p(R^n)(0<p\leqslant 1)$ 的原子分解结构理论。精确地说，R. H. Latter [La 1] 将定理 1.1 推广到高维情形，得到如下的结论。

定理 3.1　设 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，以及非负整数

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

则 $H_a^{p,q,s}(R^n)=H^p(R^n)$，且

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}}\sim\|f\|_{H^p}.$$

定理的证明需要分成若干步骤来完成。

命题 3.1　设 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，$s$ 和 m 均为非负整数，$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，以及 $m\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]+1$，则存在一常数

$$C=C(p,q,s,m),$$

使得对一切的 (p, q, s) 原子 $a(x)$，均有

$$\|a_m^*\|_p \leqslant C,$$

其中 a_m^* 为 a 的 Grand 极大函数。

证明 不妨设 a 为中心在原点的 (p, q, s) 原子，且 $\operatorname{supp} a \subset B(0, r)=B$。简记 $\widetilde{B}=B(0, 2r)$。考虑以下两种情形。首先，当 $0<p\leqslant 1$ 及 $q>1$ 时，由 Hölder 不等式和第 1 章命题 3.3(ii)，便得

$$\int_{\widetilde{B}} \{\Phi_+^*(a)(x)\}^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{\widetilde{B}} |a_m^*(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \|a_m^*\|_q^p |\widetilde{B}|^{1-\frac{p}{q}}$$

$$\leqslant C\|a\|_q^p |B|^{1-\frac{p}{q}} \leqslant C,$$

其中 $\Phi\in K_m$。其次，当 $0<p<1$ 及 $q=1$ 时，由第 1 章命题 3.3 (i)，可得

$$\int_{\widetilde{B}} \{\Phi_+^*(a)(x)\}^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{\widetilde{B}} |a_m^*(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\infty p\alpha^{p-1} |\{x\in \widetilde{B}: a_m^*(x)>\alpha\}| \mathrm{d}\alpha \leqslant C\left\{\int_0^{|B|^{-1/p}} |B| p\alpha^{p-1}\mathrm{d}\alpha\right.$$

$$\left.+\int_{|B|^{-1/p}}^\infty p\alpha^{p-1}(\|a\|_1/\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right\} \leqslant C.$$

因此，由第 1 章引理 2.3 和命题 3.1，余下只需证明

$$\int_{\widetilde{B}^c} \{\Phi_+^*(a)(x)\}^p \mathrm{d}x \leqslant C. \tag{3.1}$$

不妨设 $m=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]+1$，并记 $P_{m-1}(z)$ 为 $\Phi(w-z)$ 关于 z 的 $m-1$ 阶 Taylor 多项式，则当 $z\in B(0, r)$ 及 $w\in (B(0, 2r))^C$ 时，有

$$|\Phi(w-z)-P_{m-1}(z)| \leqslant C|w|^{-m-n}|z|^m.$$

因此，当 $x\in \widetilde{B}^C$ 时，有

$$|(a*\Phi_t)(x)| = \left| t^{-n}\int a(y)\left\{\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)-P_{m-1}\left(\frac{y}{t}\right)\right\}\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant C|x|^{-m-n}\int_B |a(y)|\,|y|^m \mathrm{d}y$$

$$\leqslant C|x|^{-m-n}|B|^{\frac{m}{n}-\frac{1}{p}+1}.$$

上式蕴含着(3.1)式，命题证毕。

设 $f\in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$，以及 $m>\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]+1$，则 f 可表示成 $f(x)\overset{S'}{=}\sum_k\lambda_k a_k(x)$，其中每一 a_k 为 (p, q, s) 原子，且 $\sum_k|\lambda_k|^p<\infty$。不难看出，由命题 3.1 便得

$$\int|f_m^{**}(x)|^p dx\leqslant\sum_k|\lambda_k|^p\int|(a_k)_m^{**}(x)|^p dx\leqslant C\sum_k|\lambda_k|^p.$$

因此，由第1章定理 3.1 可知 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$。上述结果可以写成如下。

命题 3.2 设 $0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，以及非负整数

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right].$$

则 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)\subset H^p(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{H_a^{p,q,s}},$$

其中 C 与 f 无关。

为了得到反向包含关系 $H^p(\mathbb{R}^n)\subset H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$，先来建立两个辅助引理。

引理 3.1(Vitali-Wiener 覆盖引理) 设区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，且 $|\Omega|<\infty$。若对任一 $x\in\Omega$，存在 $r(x)>0$，使得 $B(x, r(x))\subset\Omega$，则存在序列 $\{B(x_i, r(x_i)\}_i$，使得诸球 $B(x_i, r(x_i))$ 互不相交，且

$$\Omega\subset\bigcup_i B(x_i, 4r(x_i)).$$

证明 由 $|\Omega|<\infty$ 推出 $\sup_{x\in\Omega}r(x)<\infty$，故可取 $x_1\in\Omega$，使得

$$r(x_1)>\frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega}r(x).$$

假如 $\Omega\subset B(x_1, 4r(x_1))$，则引理的结论已成立。否则的话，可置 $\Omega_1=\Omega\setminus B(x_1, 4r(x_1))$，并取一 $x_2\in\Omega_1$，满足

$$r(x_2)>\frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega_1}r(x).$$

一般地，可置

$$\Omega_j=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{j}B(x_i,\ 4r(x_i)).$$

如对某一 j，有 $\Omega_j=\varnothing$，则停止上述作法。此时，引理的结论已成立。否则的话，将得到一序列 $\{x_i;\ x_i\in\Omega_{i-1}\}_i$，使得

$$r(x_i)>\frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega_{i-1}}r(x),\ i=1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 $\Omega_0=\Omega$。

注意到当 $i<j$ 时，必有 $r(x_j)<2r(x_i)$。由此不难验证诸球 $B(x_i,\ r(x_i))$ 互不相交。事实上，倘若发生

$$B(x_i,\ r(x_i))\cap B(x_j,\ r(x_j))\neq\varnothing,\ i<j,$$

则

$$|x_j-x_i|\leqslant r(x_i)+r(x_j)<3r(x_i).$$

上式表明 $x_j\in B(x_i,\ 4r(x_i))$，但此矛盾于

$$x_j\in\Omega_{j-1}=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}B(x_i,\ 4r(x_i)).$$

因此，余下只需证明

$$\Omega\setminus\bigcup_{i}^{\infty}B(x_i,\ 4r(x_i))=\varnothing.$$

后者可使用反证法得到。事实上，若上述结论不成立，则必存在一

$$x_0\in\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,\ 4r(x_i)),$$

以及 $r(x_0)>0$。注意到诸球 $B(x_i,\ r(x_i))$ 互不相交，且它们均包含在测度为有限的 Ω 之中，则有 $r(x_i)\to 0$，当 $i\to\infty$。因此，当 i 充分大时，必成立 $r(x_0)>2r(x_i)$。但后者矛盾于

$$r(x_i)>\frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega_{i-1}}r(x)\geqslant\frac{1}{2}r(x_0).$$

到此，引理证毕。

引理 3.2(Whitney 覆盖引理)　设 Ω 为 R^n 中的开集，且 $|\Omega|<\infty$，则存在序列 $\{x_i;\ x_i\in\Omega\}_i$ 和 $\{r_i;\ r_i>0\}_i$，使得下列性质成立：

(i) $\Omega=\bigcup_i B(x_i,\ r_i)$，但 $\{B(x_i,\ r_i/4)\}_i$ 为一列互不交的球；

(ii) $B(x_i, 18r_i)\cap\Omega^C=\varnothing$，但$B(x_i, 54r_i)\cap\Omega^C\neq\varnothing$；

(iii) 存在一常数$M=M(n)$，满足

$$\sum_i \mathscr{X}_{B(x_i,18r_i)}(x)\leqslant M,\ \forall x\in\Omega.$$

其中(iii)通称为有界的重叠性。

证明 任取一$x\in\Omega$。如记$\rho(x, \Omega^C)=\inf\{|x-y|: y\in\Omega^C\}$，以及$S(x)=\rho(x, \Omega^C)/144$，则$S(x)>0$。因此，$\{B(x, S(x)): x\in\Omega\}$构成了$\Omega$的一个覆盖。由引理3.1，存在一列互不相交的球$\{B(x_i, S(x_i))\}_i$，使得$\bigcup_i B(x_i, 4S(x_i))\supset\Omega$。但由$4S(x_i)=\rho(x_i, \Omega^C)/36$可知$\bigcup_i B(x_i, 4S(x_i))=\Omega$。因此，如取$r_i=4S(x_i)$，则(i)成立。再由$18r_i=\rho(x_i, \Omega^C)/2$和$54r_i=(3/2)\rho(x_i, \Omega^C)$可知(ii)成立。

为证(iii)，可设球$B(x_i, 18r_i)\ni x$。由不等式

$$36r_i=\rho(x_i, \Omega^C)\leqslant 18r_i+\rho(x, \Omega^C),$$

可得$18r_i\leqslant\rho(x, \Omega^C)$。因此，对任一$y\in B(x_i, 18r_i)$，必有$|x-y|<2\rho(x, \Omega^C)$。此表明：当$B(x_i, 18r_i)\ni x$时，有

$$B(x_i, 18r_i)\subset B(x, 2\rho(x, \Omega^C)).$$

其次，由不等式

$$\rho(x, \Omega^C)\leqslant|x-x_i|+\rho(x_i, \Omega^C)\leqslant 54r_i$$

推出$r_i/4>\rho(x, \Omega^C)/216$。因此，如设$x$同时属于$M$个球$B(x_i, 18r_i)$，则与其对应的$M$个球$B(x_i, r_i/4)$互不相交，且其半径均大于$\rho(x, \Omega^C)/216$。再由上面已证得的包含关系

$$B(x_i, r_i/4)\subset B(x, 2\rho(x, \Omega^C)),$$

便知此M个互不相交的球$B(x_i, r_i/4)$必含在同一个大球$B(x, 2\rho(x, \Omega^C))$内，因此

$$M(\rho(x, \Omega^C)/216)^n\leqslant(2\rho(x, \Omega^C))^n.$$

由此推出$M\leqslant(432)^n$。故(iii)成立，证毕。

任取一$f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，即$f^*_{\mathbb{N}}\in L^p(\mathbb{R}^n)$。如记

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n: f^*_{\mathbb{N}}(x)>\delta\},$$

则由引理3.2可知，存在序列$\{x_i\}_i$和$\{r_i\}_i$，满足引理结论中的

(i)、(ii) 及(iii)。又取一 $\theta(x)\in C_c^\infty(R^n)$，使得 supp $\theta\subset B(0,2)$，$\theta(x)=1$（当 $|x|<1$），以及 $0\leqslant\theta(x)\leqslant 1$。如置

$$\theta_i(x)=\theta((x-x_i)/r_i),\ i\in N,$$

其中 $\{x_i\}_i$ 和 $\{r_i\}_i$ 如上所述，则

$$\operatorname{supp}\theta_i\subset B(x_i,\ 2r_i),$$
$$\theta_i(x)=1,\ 当\ x\in B(x_i,\ r_i),$$

以及

$$1\leqslant\sum_i\theta_i(x)\leqslant M,\ 当\ x\in\Omega.$$

又记

$$\zeta_i(x)=\begin{cases}\theta_i(x)/\sum_j\theta_j(x), & 当\ x\in\Omega,\\ 0, & 当\ x\in\Omega^C.\end{cases}$$

不难看出 $\zeta_i\in C_c^\infty(R^n)$，$\operatorname{supp}\zeta_i\subset B(x_i,\ 2r_i)$，

$$0\leqslant\zeta_i(x)\leqslant 1,\ \sum_i\zeta_i(x)=\mathscr{X}_\Omega(x),$$

以及

$$M^{-1}\leqslant\zeta_i(x)\leqslant 1,\ 当\ x\in B(x_i,\ r_i/4).$$

此外，不难验证

$$\sup_{x\in R^n}r_i^{|\alpha|}|D^\alpha\zeta_i(x)|\leqslant C. \tag{3.2}$$

现在，取 $\delta=2^k$，并将此时的 Ω，$B(x_i,\ r_i)$ 及 $\zeta_i(x)$ 分别记作 Ω_k，$B(x_i^k,\ r_i^k)$ 及 $\zeta_i^k(x)$。此外，简记 $B_i^k=B(x_i^k,\ r_i^k)$，以及

$$\widetilde{B}_i^k=B(x_i^k,\ 2r_i^k).$$

引理 3.3 以下两事实成立：

(i) 若 $\widetilde{B}_j^{k+1}\cap\widetilde{B}_i^k\neq\emptyset$，则 $r_j^{k+1}<4r_i^k$，且 $\widetilde{B}_j^{k+1}\subset B(x_i^k,\ 18r_i^k)$；

(ii) 对每一 j，至多有 $M=M(n)$ 个 i，使得

$$\widetilde{B}_j^{k+1}\cap\widetilde{B}_i^k\neq\emptyset.$$

证明 设 $\widetilde{B}_j^{k+1}\cap\widetilde{B}_i^k\neq\emptyset$，则

$$|x_j^{k+1}-x_i^k|<2(r_i^k+r_j^{k+1}).$$

如注意到序列 $\{x_j^{k+1}\}$ 和 $\{r_j^{k+1}\}$ 满足引理 3.2 中的性质(ii)，则由 $\Omega_{k+1}\subset\Omega_k$ 可得

$$\rho(x_j^{k+1}, \Omega_k^C) \geqslant \rho(x_j^{k+1}, \Omega_{k+1}^C) > 18r_j^{k+1}.$$

因此,

$$18r_j^{k+1} < \rho(x_j^{k+1}, \Omega_k^C) \leqslant |x_j^{k+1} - x_i^k| + \rho(x_i^k, \Omega_k^C)$$
$$\leqslant 2r_j^{k+1} + 56r_i^k.$$

由此推出

$$r_j^{k+1} < 4r_i^k.$$

再任取一$y \in \widetilde{B}_j^{k+1}$，由不等式

$$|y - x_i^k| < |x_j^{k+1} - x_i^k| + 2r_j^{k+1} < 18r_i^k$$

便知引理的(i)成立。如注意到序列$\{x_i^k\}$和$\{r_i^k\}$满足引理3.2中的性质(iii)，则(ii)的结论可由(i)直接推出，证毕。

下面，将赋予$\mathscr{P}_s$(s次多项式全体)以Hilbert空间范数：

$$\|P\| = \left(\frac{\int |P(x)|^2 \zeta_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x}{\int \zeta_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x} \right)^{1/2}, \quad P \in \mathscr{P}_s.$$

又记$\{\pi_l\}_{l=1}^L$为$\mathscr{P}_s$关于上述范数的规范正交基，其中

$$L = \dim \mathscr{P}_s.$$

引理3.4　存在一与j、k无关的常数C，满足

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m,\, y \in \widetilde{B}_j^{k+1}} (r_j^{k+1})^{|\alpha|} |D^\alpha \pi_l(y)| \leqslant C,$$

以及

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m,\, y \in \mathbf{R}^n} (r_j^{k+1})^{|\alpha|} |D^\alpha \pi_l(y) \zeta_j^{k+1}(y)| \leqslant C.$$

证明　首先对$m=0$的情形给出证明。由ζ_j^{k+1}的性质可得

$$1 = \|\pi_l\|^2 \geqslant \frac{M^{-1}}{|\widetilde{B}_j^{k+1}|} \int_{B(x_j^{k+1}, r_j^{k+1}/4)} |\pi_l(y)|^2 \mathrm{d}y$$
$$= C \int_{B(0,1/4)} |\pi_l(x_j^{k+1} + r_j^{k+1}t)|^2 \mathrm{d}t.$$

但对任一$P \in \mathscr{P}_s$，使用有限维空间上任意两个范数为等价的这一事实，可得

$$\left(\int_{B(0,1/4)} |P(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2} \geqslant C \sup_{|t|<2} |P(t)|, \tag{3.3}$$

其中C与P无关。如取$P(t) = \pi_l(x_j^{k+1}, r_j^{k+1}t)$，则由以上两式便

得

$$\sup_{y\in \widetilde{B}_j^{k+1}} |\pi_l(y)| \leqslant C.$$

注意到 $\operatorname{supp}\zeta_j^{k+1}\subset \widetilde{B}_j^{k+1}$，由上式推出

$$\sup_{y\in \mathbf{R}^n} |\pi_l(y)\zeta_j^{k+1}(y)| \leqslant C.$$

因此，当 $m=0$ 时，引理的结论成立。

当 $m\neq 0$ 时，使用不等式

$$\sup_{|\alpha|\leqslant m,\,|t|<2} |D^\alpha P(t)| \leqslant C\left(\int_{B(0,1/4)} |P(t)|^2 dt\right)^{1/2} \qquad (3.4)$$

来代替(3.3)式，同样可得引理的前一结论，这里 (3.4) 式是(3.3)式以及关于多项式导数的 Bernstein 不等式的直接结果。最后，如使用 (3.2) 式和引理的前一结论便导致引理的后半部结论，证毕。

下面将指出，存在唯一的 $P_i^k(x)\in\mathscr{P}_s$，满足

$$\int \{f(x)-P_i^k(x)\}\,Q(x)\zeta_i^k(x)dx=0,\ \forall Q\in\mathscr{P}_s, \qquad (3.5)$$

以及存在唯一的 $P_{i,j}^{k+1}(x)\in\mathscr{P}_s$，满足

$$\int \{f(x)-P_j^{k+1}(x)\}\,Q(x)\zeta_i^k(x)\zeta_j^{k+1}(x)dx$$
$$=\int P_{i,j}^{k+1}(x)Q(x)\zeta_j^{k+1}(x)dx,\ \forall Q\in\mathscr{P}_s. \qquad (3.6)$$

上述方程之解的存在性是明显的。事实上，$\mathscr{P}_s$ 中的多项式

$$\sum_{l=1}^{L}\left(\int f\pi_l\zeta_i^k\Big/\int\zeta_i^k\right)\overline{\pi_l(x)}$$

和

$$\sum_{l=1}^{L}\left(\int (f-P_j^{k+1})\pi_l\zeta_i^k\zeta_j^{k+1}\Big/\int\zeta_j^{k+1}\right)\overline{\pi_l(x)}$$

分别满足(3.5)和(3.6)式。

解的唯一性证明也是简单的。设 $P_i^k(x)$、$\overline{P}_i^k(x)\in\mathscr{P}_s$，它们同时满足(3.5)式，则

$$\int \{\overline{P}_i^k(x)-P_i^k(x)\}\,Q(x)\zeta_i^k(x)dx=0,\ \forall Q\in\mathscr{P}_s.$$

如取 $Q=\overline{P}_i^k-P_i^k\in\mathscr{P}_s$，便得

$$\int\{\overline{P}_i^k(x)-P_i^k(x)\}^2\zeta_i^k(x)\mathrm{d}x=0.$$

注意到 $\zeta_i^k(x)\geqslant 0$，由上式便推出 $\overline{P}_i^k=P_i^k$. 同理可证满足(3.6)的多项式 $P_{i,j}^{k+1}(x)$ 也是唯一的。

对于 $P_j^{k+1}(x)$ 和 $P_{i,j}^{k+1}(x)$，以下几个事实成立。

引理 3.5 存在一与 k、j 无关的常数 C，满足

$$\sup_{y\in\widetilde{B}_j^{k+1}}|P_j^{k+1}(y)|\leqslant 2^{k+1}C.$$

证明 前面已经指出

$$P_j^{k+1}(y)=\sum_{l=1}^{L}\left(\int f\pi_l\zeta_j^{k+1}\Big/\int\zeta_j^{k+1}\right)\overline{\pi_l(y)}.$$

如取一 $z\in B(x_j^{k+1},54r_j^{k+1})\cap\Omega_{k+1}^C$，则可将 $P_j^{k+1}(y)$ 写成

$$\begin{aligned}|P_j^{k+1}(y)|&=\left|\sum_{l=1}^{L}\frac{(r_j^{k+1})^n}{\int\zeta_j^{k+1}}\int f(z-r_j^{k+1}x)\right.\\&\qquad\left.\cdot\pi_l(z-r_j^{k+1}x)\zeta_j^{k+1}(z-r_j^{k+1}x)\mathrm{d}x\cdot\overline{\pi_l(y)}\right|\\&=\left|\sum_{l=1}^{L}\int f(z-r_j^{k+1}x)\Phi^l(x)\mathrm{d}x\cdot\overline{\pi_l(y)}\right|\\&=\left|\sum_{l=1}^{L}(f*\Phi^l_{r_j^{k+1}})(z)\overline{\pi_l(y)}\right|,\end{aligned}$$

其中

$$\Phi^l(x)=\Phi^{l,z,k,j}(x)\triangleq\frac{(r_j^{k+1})^n}{\int\zeta_j^{k+1}}\pi_l(z-r_j^{k+1}x)\zeta_j^{k+1}(z-r_j^{k+1}x).$$

显然，$\Phi^l\in C_C^\infty(R^n)$，且 $\operatorname{supp}\Phi^l\subset B(0,56)$. 于是，由引理 3.4 可知

$$\|\Phi^l\|_{\mathscr{N}_m}\leqslant C,$$

其中 C 与 z、k、j 无关。因此，

$$\sup_{y\in\widetilde{B}_j^{k+1}}|P_j^{k+1}(y)|\leqslant Cf_m^*(z)<2^kC.$$

引理证毕。

引理 3.6 存在一与 i、j、k 无关的常数 C，满足

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|P_{i,j}^{k+1}(y)\zeta_j^{k+1}(y)|\leqslant 2^{k+1}C.$$

证明 前面已经指出

$$P_{i,j}^{k+1}(y)=\sum_{l=1}^{[L]}\left(\int(f-P_j^{k+1})\pi_l\zeta_i^k\zeta_j^{k+1}\Big/\int\zeta_j^{k+1}\right)\overline{\pi_l(y)}.$$

由引理 3.4 知，只需证明

$$\left|\frac{\int(f-P_j^{k+1})\pi_l\zeta_i^k\zeta_j^{k+1}}{\int\zeta_j^{k+1}}\right|\leqslant 2^{k-1}C.$$

为证上式，由引理 3.4 和引理 3.5 知，也只需证明

$$\left|\frac{\int f\pi_l\zeta_i^k\zeta_j^{k+1}}{\int\zeta_j^{k+1}}\right|\leqslant 2^{k+1}C.$$

如取一 $w\in B(x_j^{k+1},\ 54r_j^{k+1})\cap\Omega_{k+1}^C$，则上式左端可写成

$$\left|\frac{(r_j^{k+1})^n}{\int\zeta_j^{k+1}}\int f(w-r_j^{k+1}y)\pi_l(w-r_j^{k+1}y)\zeta_i^k(w-r_j^{k+1}y)\right.$$

$$\left.\cdot\zeta_j^{k+1}(w-r_j^{k+1}y)\,dy\right|=\left|\int f(w-r_j^{k+1}y)\Psi^l(y)dy\right|$$

$$=|(f*\Psi^l_{r_j^{k+1}})(w)|,$$

其中

$$\Psi^l(y)=\Psi^{l,w,k,j}(y)$$

$$\triangleq\frac{(r_j^{k+1})^n}{\int\zeta_j^{k+1}}\pi_l(w-r_j^{k+1}y)\zeta_i^k(w-r_j^{k+1}y)\zeta_j^{k+1}(w-r_j^{k+1}y).$$

同引理 3.5 中对 Φ^l 的证法．可得

$$\|\Psi^l\|_{S_m}\leqslant C,$$

其中常数 C 与 k、j、w 无关．因此，

$$\left|\frac{\int f\pi_l\zeta_i^k\zeta_j^{k+1}}{\int\zeta_j^{k+1}}\right|\leqslant Cf_m^*(w)<2^{k+1}C.$$

引理证毕。

引理 3.7 对每一 $k\in\mathbb{Z}$, 有

$$\sum_i\sum_j P_{i,j}^{k+1}(x)\zeta_j^{k+1}(x)=0,$$

其中等式同时在点态意义下和在 $\mathscr{S}'$ 中成立。

证明 由球序列 $\{B(x_i^k, r_i^k)\}$ 所满足的有界重叠性质(iii), 并注意到 $\operatorname{supp}\zeta_j^{k+1}\subset\tilde{B}_j^{k+1}$, 便可知: 对任一 $x\in R^n$, 至多有 $M=M(n)$ 个 j, 使得 $\zeta_j^{k+1}(x)\neq 0$. 其次, 对每一固定的 j, 为使 $P_{i,j}^{k+1}(x)\neq 0$, (i,j)必满足 $\tilde{B}_i^k\cap\tilde{B}_j^{k+1}\neq\emptyset$. 事实上, 设 $\tilde{B}_i^k\cap\tilde{B}_j^{k+1}=\emptyset$, 则

$$\zeta_i^k(y)\zeta_j^{k+1}(y)=0,\ \forall y\in R^n.$$

但由 $P_{i,j}^{k+1}(x)$ 的表达式, 便可得 $P_{i,j}^{k+1}(x)=0$. 因此, 这就证实了上面的断言。于是, 由引理 3.3 可知: 对每一 j, 满足 $\tilde{B}_i^k\cap\tilde{B}_j^{k+1}\neq\emptyset$ 的 i 至多有 M 个。因此, 对任一 $x\in R^n$, 引理中的和式实际上为一有限和。此外, 由引理 3.6 还得到

$$\sum_i\sum_j|P_{i,j}^{k+1}(x)\zeta_j^{k+1}(x)|\leqslant 2^{k+1}CM^2.$$

于是, 级数

$$\sum_i\sum_j P_{i,j}^{k+1}(x)\zeta_j^{k+1}(x)=\sum_j\Big(\sum_i P_{i,j}^{k+1}(x)\Big)\zeta_j^{k+1}(x)$$

在点态意义下收敛。因此, 为证引理中的等式在点态意义下成立, 只需证明: 对每一 j, 有

$$\sum_i P_{i,j}^{k+1}(x)=0,\ \forall x\in R^n.$$

事实上, 由(3.6)式可得

$$\begin{aligned}&\int\{f(x)-P_j^{k+1}(x)\}Q(x)\Big(\sum_i\zeta_i^k(x)\Big)\zeta_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x\\&=\int\Big(\sum_i P_{i,j}^{k+1}(x)\Big)Q(x)\zeta_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x,\ \forall Q\in\mathscr{P}_s.\end{aligned}$$

注意到 $\sum_i\zeta_i^k(x)=\mathscr{X}_{\Omega_k}(x)$, $\operatorname{supp}\zeta_j^{k+1}\subset\Omega_{k+1}\subset\Omega_k$, 以及(3.5)式, 便得

$$\begin{aligned}&\int\Big(\sum_i P_{i,j}^{k+1}(x)\Big)Q(x)\zeta_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x\\&=\int\{f(x)-P_j^{k+1}(x)\}Q(x)\zeta_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x=0,\ \forall Q\in\mathscr{P}_s.\end{aligned}$$

由此易得

$$\sum_i P_{i,j}^{k+1}(x) = 0.$$

其次，由不等式

$$\sum_i \sum_j \int |P_{i,j}^{k+1}(x) \zeta_j^{k+1}(x)| dx \leqslant 2^{k+1} CM |\Omega_{k+1}| < \infty$$

和 Lebesgue 控制收敛定理，可知引理中的等式在 L^1 中成立，从而它在 $\mathscr{S}'$ 中也成立，证毕。

现在，要建立命题 3.2 的逆命题。

命题 3.3 设 $0 < p \leqslant 1$，且非负整数 $s \geqslant \left[n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right]$，则

$$H^p(\mathbb{R}^n) \subset H_a^{p,\infty,s}(\mathbb{R}^n),$$

且

$$\|f\|_{H_a^{p,\infty,s}} \leqslant C \|f\|_{H^p}.$$

证明 首先设 $f \in H^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$。如置

$$g^k = f\chi_{\Omega_k^c} - \sum_i P_i^k \zeta_i^k = \sum_i (f - P_i^k) \zeta_i^k$$

以及

$$b^k = f\mathscr{X}_{\Omega_k^c} + \sum_i P_i^k \zeta_i^k,$$

则 $f = g^k + b^k$。前面已指出：对任一 $x \in \mathbb{R}^n$，至多有 $M = M(n)$ 个 i，满足 $\zeta_i^k(x) \neq 0$。由此并使用引理 3.5，易得

$$|b^k(x)| \leqslant 2^k C.$$

因此，一致地成立

$$\lim_{k \to -\infty} g^k(x) = f(x), \tag{3.7}$$

另一方面，如注意到 $\operatorname{supp} g^k \subset \Omega_k$，以及

$$|\Omega_k| \leqslant (C\|f_m^*\|_p / 2^k)^p \to 0, \text{ 当 } k \to \infty,$$

则得

$$\lim_{k \to \infty} g^k(x) = 0, \text{ a. e.} \tag{3.8}$$

据(3.7)和(3.8)式，f 可写成

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{g^k(x) - g^{k+1}(x)\}, \text{ a. e.}$$

但

$$g^k - g^{k+1} = \sum_i (f - P_i^k)\zeta_i^k - \sum_j (f - P_j^{k+1})\zeta_j^{k+1}.$$

注意到 $\sum_i \zeta_i^k = \mathscr{X}_{\Omega_k}$，以及 $\operatorname{supp}\zeta_j^{k+1} \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega_k$，则上式可写成

$$g^k - g^{k+1} = \sum_i \{(f - P_i^k)\zeta_i^k - \sum_j (f - P_j^{k+1})\zeta_i^k \zeta_j^{k+1}\}.$$

再由引理3.7，上式还可写成

$$g^k - g^{k-1} = \sum_i \{(f - P_i^k)\zeta_i^k - \sum_j [(f - P_j^{k+1})\zeta_i^k - P_{i,j}^{k+1}]\zeta_j^{k+1}\}$$

$$\triangleq \sum_i h_i^k,$$

其中

$$h_i^k = (f - P_i^k)\zeta_i^k - \sum_j [(f - P_j^{k+1})\zeta_i^k - P_{i,j}^{k+1}]\zeta_j^{k+1}.$$

因此，f 可表示为

$$f(x) = \sum_k \sum_i h_i^k(x), \text{ a. e.}$$

显然，$\operatorname{supp} h_i^k \subset \widetilde{B}_i^k$。此外，由(3.5)和(3.6)式容易看出，关系式

$$\int h_i^k(x) Q(x) \mathrm{d}x = 0$$

对任一 $Q \in \mathscr{P}_s$ 成立。为估计 h_i^k 的尺寸，先将它表示为

$$h_i^k = f\zeta_i^k \mathscr{X}_{\Omega_{k+1}^c} - P_i^k \zeta_i^k + \zeta_i^k \sum_j P_j^{k+1} \zeta_j^{k+1} + \sum_j P_{i,j}^{k+1} \zeta_j^{k+1}.$$

由第1章命题3.2可知

$$|f\zeta_i^k \mathscr{X}_{\Omega_{k+1}^c}| \leqslant C f_m^* \mathscr{X}_{\Omega_{k+1}^c} \leqslant 2^k C.$$

再注意到球序列 $\{B(x_j^{k+1}, r_j^{k+1})\}$ 满足有界重叠性质(iii)，并使用引理3.5和引理3.6，便得到

$$|h_i^k(x)| \leqslant 2^k C_0.$$

因此，如置 $\lambda_i^k = 2^k C_0 |\widetilde{B}_i^k|^{1/p}$，以及 $a_i^k(x) = h_i^k(x)/\lambda_i^k$，则等式

$$f(x) = \sum_{k,i} \lambda_i^k a_i^k(x) \tag{3.9}$$

在a. e. 意义下成立，其中每一 a_i^k 为(p, ∞, s)原子，最后，容易验证

$$\sum_{k,i}|\lambda_i^k|^p\leqslant C\sum_{k,i}2^{kp}|B_i^k|\leqslant C\sum_k 2^{kp}|\Omega_k|$$

$$\leqslant C\sum_k\int_{2^{k-1}}^{2^k}p\alpha^{p-1}|\{x:f_m^*(x)>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\leqslant C\|f_m^*\|_p<\infty.$$

为证 $f\in H_a^{p,\infty,s}(\mathbb{R}^n)$，余下只需证明(3.9)式在 $\mathscr{S}'$ 中也成立。事实上，由不等式

$$|P_i^k(x)\zeta_i^k(x)|\leqslant C2^k\zeta_i^k(x)\leqslant Cf_m^*(x)\zeta_i^k(x)$$

以及

$$|\sum_i P_i^k(x)\zeta_i^k(x)|\leqslant Cf_m^*(x)$$

推出

$$|b^k(x)|\leqslant Cf_m^*(x).$$

由此推得

$$|g^k(x)|=|f(x)-b^k(x)|\leqslant Cf_m^*(x).$$

注意到当 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 时，必有 $f_m^*\in L^1(\mathbb{R}^n)$。因此，由 Lebesgue 控制收敛定理便得到等式

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{g^k(x)-g^{k+1}(x)\}$$

在 L^1 中成立。再注意到

$$g^k-g^{k+1}=\sum_i h_i^k,$$

以及 h_i^k 的支集具有有界的重叠性，便可知等式

$$f(x)=\sum_k\sum_i h_i^k(x)$$

在 L^1 中成立。此蕴含着(3.9)式在 $\mathscr{S}'$ 中成立。

上面已证得 $H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)\subset H_a^{p,\infty,s}(\mathbb{R}^n)$。为完成命题的证明，只需证明 $H^p\cap L^2$ 在 H^p 中稠密即可。事实上，如果最后的断言成立，则对任一 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，必存在 $f_k\in H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\|f-f_k\|_{H^p}\to 0,\ 当\ k\to\infty.$$

不妨认为 f_k 满足

$$\|f_1\|_{H^p}^p\leqslant\frac{3}{2}\|f\|_{H^p}^p,$$

以及

$$\|f_{k+1}-f_k\|_{H^p}^p\leqslant 2^{-k-1}\|f\|_{H^p}^p,\ k\in\mathbb{N}.$$

如置 $g_1=f_1$，以及 $g_k=f_k-f_{k-1}(k>1)$，则等式

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}g_k$$

在 H^p 中成立。因 $g_k\in H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$，则 $g_k\in H_0^{p,\infty,s}(\mathbb{R}^n)$。从而，$g_k$ 可表示成

$$g_k=\sum_j\lambda_j^k a_j^k,$$

其中等式在 $\mathscr{S}'$ 中成立，每一 a_j^k 为 (p,∞,s) 原子，以及

$$\sum_j|\lambda_j^k|^p\leqslant C\|g_k\|_{H^p}^p\quad(C\text{ 与 }k\text{ 无关}).$$

此时，f 可表示成

$$f=\sum_k\sum_j\lambda_j^k a_j^k,$$

其中等式在 $\mathscr{S}'$ 中成立，且

$$\sum_k\sum_j|\lambda_j^k|^p\leqslant C\sum_k\|g_k\|_{H^p}^p\leqslant C\|f\|_{H^p}^p.$$

于是，$f\in H_0^{p,\infty,s}(\mathbb{R}^n)$。这就证实了前面的断言。因此，命题 3.3 证明的完成有赖于 $H^p\cap L^2$ 在 H^p 中稠密这一事实。为此，先建立一个关于调和函数的不等式。

引理 3.8　设 $X_0\in\mathbb{R}_+^{n+1}$，球 $B\subset\mathbb{R}_+^{n+1}$，且 B 以 x_0 为中心。若 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和，则

$$|u(X_0)|\leqslant C_{p,n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|u(X)|^p\mathrm{d}X\right)^{1/p},\ 0<p<\infty.$$

证明　当 $p=1$ 时，由调和函数平均值定理直接推得引理的结论。当 $p>1$ 时，其结论也不难由 Hölder 不等式推得。下面，设 $0<p<1$，不失一般性，可设 B 的半径为 1（否则，对变元 X 作一伸缩变换）。其次，还不妨设 $\int_B|u(X)|^p\mathrm{d}X=1$（否则，考虑 $v(X)=u(X)\Big/\int_B|u(Y)|^p\mathrm{d}Y$）。因此，在上述的假设下，只需证明

$$|u(X_0)|\leqslant C_{p,n}.$$

如记 $\sum(r)=\{X:|X-X_0|=r\}$，则由调和函数的最大值原理可知：为证上式，只需证明存在一 $r_0<1$，使得

$$\sup_{X\in\Sigma(r_0)}|u(X)|\leqslant C_{p,n}. \tag{3.10}$$

以下设 $\rho<r<1$，任取 $X\in\Sigma(\rho)$，由调和函数的唯一性定理和 Poisson 积分性质可知

$$u(X)=\int_{\Sigma(r)}u(Y)P(X,Y)\mathrm{d}Y,$$

其中 $P(X,Y)=(\Sigma(1))^{-1}(|Y|^2-|X|^2)/|Y-X|^{n+1}$。由此推出

$$\sup_{X\in\Sigma(\rho)}|u(X)|\leqslant\frac{Cr}{(r-\rho)^n}\int_{\Sigma(r)}|u(X)|\mathrm{d}X.$$

记 $\|u\|_\infty=\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|$。不妨假设对任一 $r<1$，均有 $\|u\|_\infty\geqslant1$（否则，(3.10)式自然成立）。如设 $0<\theta<1$，则

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma(r)}|u(X)|\mathrm{d}X&=\|u\|_\infty^\theta\int_{\Sigma(r)}\left(\frac{|u(X)|}{\|u\|_\infty}\right)^\theta|u(X)|^{1-\theta}\mathrm{d}X\\&\leqslant\|u\|_\infty^\theta\int_{\Sigma(r)}\left(\frac{|u(X)|}{\|u\|_\infty}\right)^{\theta p}|u(X)|^{1-\theta}\mathrm{d}X\\&\leqslant\|u\|_\infty^\theta\left(\int_{\Sigma(r)}\left(\frac{|u(X)|}{\|u\|_\infty}\right)^p\mathrm{d}X\right)^\theta\left(\int_{\Sigma(r)}|u(X)|\mathrm{d}X\right)^{1-\theta}.\end{aligned}$$

因此，由上式可得

$$\int_{\Sigma(r)}|u(X)|\mathrm{d}X\leqslant\|u\|_\infty^{1-p}\int_{\Sigma(r)}|u(X)|^p\mathrm{d}X,$$

从而，

$$\sup_{X\in\Sigma(\rho)}|u(X)|\leqslant\frac{Cr}{(r-\rho)^n}\|u\|_\infty^{1-p}\int_{\Sigma(r)}|u(X)|^p\mathrm{d}X.$$

如取 $\rho=r^a$，其中 $a>1$，则

$$\begin{aligned}\log\sup_{X\in\Sigma(r^a)}|u(X)|\leqslant\log\frac{Cr}{(r-\rho)^n}+(1-P)\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\\+\log\int_{\Sigma(r)}|u(X)|^p\mathrm{d}X.\end{aligned}$$

将上式两端乘以 $1/r$ 并关于 r 在[1/2, 1]上积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_{1/2}^1\log\sup_{X\in\Sigma(r^a)}|u(X)|\frac{\mathrm{d}r}{r}\\&\leqslant C_a+(1-p)\int_{1/2}^1\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\frac{\mathrm{d}r}{r}\end{aligned}$$

$$+\int_{1/2}^{1}\log\int_{\Sigma(r)}|u(X)|^p\mathrm{d}X\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

对上式左端作变量替换 $r^a\to r$，便得

$$\frac{1}{a}\int_{(\frac{1}{2})^a}^{1}\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$\leqslant C_a+(1-p)\int_{(\frac{1}{2})^a}^{1}\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$+2\int_0^1\log\int_{\Sigma(r)}|u(X)|^p\mathrm{d}X\mathrm{d}r.$$

如取 $a>1$，使得 $1/a>1-p$，则由上式可得

$$\int_{(\frac{1}{2})^a}^{1}\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\frac{\mathrm{d}r}{r}\leqslant C_{p,n}.$$

记 $C=e^{4C_{p,n}}$，其中 $C_{p,n}$ 为上式右端的常数。不难验证：存在一 $r_0\in(1/2^a,1)$，使得

$$\sup_{X\in\Sigma(r_0)}|u(X)|\leqslant C.$$

否则的话，将对一切的 $r\in(1/2^a,1)$，有

$$\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\geqslant\log C,$$

但后者将导致错误的不等式

$$\int_{(\frac{1}{2})^a}^{1}\log\sup_{X\in\Sigma(r)}|u(X)|\frac{\mathrm{d}r}{r}\geqslant 2C_{p,n}.$$

因此，(3.10)式成立，引理证毕。

命题 3.4 $H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，$0<p\leqslant 1$。

证明 设 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$。如记 $u(x,t)=(f*P_t)(x)$，则

$$\sup_{|y-x|<t}|u(y,t)|=P_\nabla^*(f)(x)\in L^p(\mathbb{R}^n).$$

因此，

$$\sup_{|y-x|<t}|u(y,t)|<\infty,\ \text{a. e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

但 u 的非切向有界蕴含着 u 的非切向 a. e. 收敛。因此，$\lim\limits_{t\to 0+}u(x,t)$ a. e. 存在。另一方面，由引理 3.8 得

$$|u(x,t)|^p\leqslant Ct^{-n-1}\iint_{|(x,t)-(\xi,\eta)|<t}|u(\xi,\eta)|^p\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$\leqslant Ct^{-n-1}\int_0^{2t}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|u(\xi,\ \eta)|^p\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\eta$$

$$\leqslant Ct^{-n}\|P_+^*(f)\|_p^p.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty}u(x,\ t)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

因此，对 a. e. 的 x, $u(x,\ t)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上关于 t 为一致连续的。如记 $f_k=u(x,\ 1/k)$，对等式

$$P_t*(f-f_k)(x)=u(x,\ t)-u\left(x,\ t+\frac{1}{k}\right)$$

使用 u 关于 t 的一致连续性，以及 Lebesgue 控制收敛定理，则可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\sup_{t>0}|P_t*(f-f_k)(x)|\right\}^p\mathrm{d}x=0.$$

此即

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{H^p}=0.$$

余下只需验证 $f_k\in H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$。首先，由不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_k(x)|^2\mathrm{d}x=\|f_k\|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_k(x)|}{\|f_k\|_\infty}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|f_k\|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_k(x)|}{\|f_k\|_\infty}\right)^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|f_k\|_\infty^{2-p}\sup_{t>0}\|u(\cdot,\ t)\|_p^p$$

看出 $f_k\in L^2(\mathbb{R}^n)$。其次，由不等式

$$\sup_{t>0}|(P_t*f_k)(x)|\leqslant\sup_{t>0}|(P_t*f)(x)|$$

可知 $P_+^*(f_k)\in L^p(\mathbb{R}^n)$。因此，$f_k\in H^p(\mathbb{R}^n)$，命题证毕。

到此，不难看出，定理 3.1 的结论由命题 3.2 和命题 3.3 直接推得。

注 3.1 对于周期情形，$\mathbb{T}^n$ 上的原子定义以及空间 $H^p(\mathbb{T}^n)$ 的原子分解结构理论可以类似地建立起来（参见 R. R. Coifman, G. Weiss [CW 1]）。

注 3.2 A. Jonsson, P. Sjögren, H. Wallin [JSW 1] 研

究了支集在子集$F\subset\mathbb{R}^n$内的H^p中元素的原子分解结构，得到如下的结果：设F为$\mathbb{R}^n$内的有界闭凸集，且具有非空的内部。若$f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，$0<p\leqslant 1$，以及$\operatorname{supp} f\subset F$，则$f$可表为

$$f(x)\overset{S'}{=}\sum_k \lambda_k a_k(x),$$

其中每一a_k为p原子，$\operatorname{supp} a_k\subset F$，以及

$$\sum_k |\lambda_k|^p<\infty.$$

注 3.3 A. Miyachi [Mi 2] 对底空间为区域$\Omega(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$的 Hardy 空间$H^p(\Omega)$也给出了原子分解结构，$H^p(\Omega)$的定义见第1章注 3.4.

注 3.4 命题 3.4 的证明已蕴含着如下的结论：设$1\leqslant q<\infty$，则$H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$在$H^p(\mathbb{R}^n)$中稠密，其中$0<p\leqslant 1$.

§4 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间

本节将证明原子 Hardy 空间$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$的对偶空间就是意大利学者 Campanato 早先定义的一类函数空间，即通称的Campanato 空间或广义 Lipschitz 空间。自然，它们也是$H^p(\mathbb{R}^n)$的对偶空间。

首先，指出一个简单的事实。设$g\in L_{loc}$，以及B为一$\mathbb{R}^n$中的球。如同(3.5)式的证明，存在唯一的$P\in\mathscr{P}_s$，使得

$$\int_B\{g(x)-P(x)\}Q(x)\mathrm{d}x=0,\ \forall Q\in\mathscr{P}_s.$$

记此唯一的P为P_Bg.

定义 4.1 设$\alpha\geqslant 0$，$1\leqslant q'\leqslant\infty$，以及$s$为一非负整数。如置

$$\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}=\sup_B |B|^{-\alpha}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|g(x)-(P_Bg)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'},$$

则函数空间

$$\mathscr{L}_{\alpha,q',s}(\mathbb{R}^n)=\{g\in L_{loc}^{q'}(\mathbb{R}^n):\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}<\infty\}$$

被称为 Campanato 空间(参见 S. Campanato [Ca 1]).

由注 2.1 不难看出 $\mathscr{L}_{0,1,s}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$。此外，容易证明 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}$ 为一准范数。事实上，$\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}=0$ 当且仅当 $g\in\mathscr{P}_s$。因此，当 $g_1-g_2\in\mathscr{P}_s$ 时，如将 g_1 和 g_2 看成等同的话，则 $\mathscr{L}_{\alpha,q',s}$便成为线性赋范空间。

下面，关于 P_Bg 的一个事实是常用到的。

引理 4.1 设 $g\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$，以及 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的球，则

$$\sup_{x\in B}|(P_Bg)(x)|\leqslant\frac{C}{|B|}\int_B|g(x)|\mathrm{d}x.$$

此外，若 $|g|^q\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$，$1\leqslant q<\infty$，则

$$\left(\int_B|(P_Bg)(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_B|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

其中C 与 B、g 无关。

证明 显然，第二式可由第一式直接推得。因此，只需给出第一式的证明。设 $\{\varphi_l^B;|l|\leqslant s\}$ 为 $\{x^\alpha;|\alpha|\leqslant s\}$ 经 Gram-Schmidt 方法得到的关于权 $1/|B|$ 为正交的多项式（限制在B上）。此即 $\varphi_l^B\in\mathscr{P}_s$，且满足

$$\langle\varphi_\nu^B,\ \varphi_\mu^B\rangle\triangleq\frac{1}{|B|}\int_B\varphi_\nu^B(x)\varphi_\mu^B(x)\mathrm{d}x=\delta_{\nu\mu}=\begin{cases}1,&\nu=\mu,\\0,&\nu\neq\mu.\end{cases}$$

不妨设 $B=B(0,\ r)$。由上式可知

$$\frac{1}{|B(0,\ 1)|}\int_{B(0,1)}\varphi_\nu^{B(0,r)}(ry)\varphi_\mu^{B(0,r)}(ry)\mathrm{d}y=\delta_{\nu\mu}.$$

此表明当 $x\in B(0,\ r)$ 时，$\varphi_l^{B(0,r)}(x)=\varphi_l^{B(0,1)}(r^{-1}x)$。因此，如取

$$C=\sum_{|l|\leqslant s}\|\varphi_l^{B(0,1)}\|_\infty,$$

则必有 $|\varphi_l^B|_\infty\leqslant C$。其次，容易验证

$$(P_Bg)(x)=\sum_{|l|\leqslant s}\langle g,\ \varphi_l^B\rangle\varphi_l^B(x).$$

显然，引理的第一式由以上两式直接推得，证毕。

关于 H^p 之对偶空间的基本结果可表述成如下。

定理 4.1 设 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，$1/q+1/q'=1$，以及非负整数 $s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$。若 $g\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}(\mathbb{R}^n)$，则由

$$Lf=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

确定的线性泛函在 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ 的某稠子集上有界。反之，若L为 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$上的有界线性泛函，则必存在一$l\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$Lf=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n),$$

其中最后的等式被理解为

$$Lf=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\int a_k(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \text{当}\ f(x)\overset{S'}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k(x)\in H_a^{p,q,s}.$$

证明　先证 $\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}\subset(H_a^{p,q,s})'$. 设 $g\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}$，$a$ 为一$(p,\ q,\ s)$原子，且 $\operatorname{supp}a\subset B$，则

$$\begin{aligned}\left|\int a(x)g(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int a(x)\{g(x)-(P_Bg)(x)\}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\|a\|_q\left\{\int_B|g(x)-(P_Bg)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}\\&\leqslant\|g\|_{\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}}.\end{aligned}$$

如设 $g\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}$，以及$f=\sum\limits_{\text{finite}}\lambda_k a_k\in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$，其中每一$a_k$为$(p,\ q,\ s)$原子，则由上面对$p$原子已证得的结论，有

$$\begin{aligned}\left|\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\Sigma|\lambda_k|\|g\|_{\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}}\\&\leqslant(\Sigma|\lambda_k|^p)^{1/p}\|g\|_{\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}}.\end{aligned}$$

因此，定理的前半部结论成立。

以下证明 $(H_a^{p,q,s})'\subset\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}$. 设$B$为一球，并记

$$L_B^q=\{f\in L^q(B):P_Bf=0\}.$$

下面，将证明分成若干步骤，其方法类似于定理 2.1 的证明。

(i) 先证 $(H_a^{p,q,s})'\subset(L_B^q)'$. 显然，当 $f\in L_B^q$ 时，

$$a(x)=|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_q^{-1}f(x)$$

为一$(p,\ q,\ s)$原子。因此，$f\in H_a^{p,q,s}$，且

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}}\leqslant|B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q.$$

注意到当 $L\in(H_a^{p,q,s})'$ 时,

$$|Lf|\leqslant\|L\|\|f\|_{H_a^{p,q,s}}\leqslant(\|L\||B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})\|f\|_q,\ \forall f\in L_B^q.$$

因此,(i)得证。由(i)、Hahn-Banach 延拓定理,以及 Riesz 表现定理可知:存在一 $l\in L^{q'}(B)$,使得

$$Lf=\int_B f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L_B^q.$$

如取 $B_j\uparrow\mathbb{R}^n$,则由以上结果推出:对每一 B_j,存在一$l_j\in L^{q'}(B_j)$,使得

$$Lf=\int_{B_j}f(x)l_j(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L_{B_j}^q.\tag{4.1}$$

(ii) 构造一 l,使得对一切的 B_j,均成立

$$Lf=\int_{B_j}f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L_{B_j}^q.$$

首先设 $f\in L_{B_1}^q$。由(4.1)式,存在一 $l_1\in L^{q'}(B_1)$,使得

$$Lf=\int_{B_1}f(x)l_1(x)\mathrm{d}x.$$

但 $f\in L_{B_1}^q\subset L_{B_2}^q$。再一次使用(4.1)式,有一 $l_2\in L^{q'}(B_2)$,满足

$$Lf=\int_{B_2}f(x)l_2(x)\mathrm{d}x=\int_{B_1}f(x)l_2(x)\mathrm{d}x.$$

将以上两式相减,得

$$\int_{B_1}f(x)\{l_1(x)-l_2(x)\}\mathrm{d}x=0,\ \forall f\in L_{B_1}^q.$$

如取 $f(x)=g(x)-(P_{B_1}g)(x)$,其中 $g\in L^q(B_1)$,则 $f\in L_{B_1}^q$。对此 f,由上式得

$$\int_{B_1}\{g(x)-(P_{B_1}g)(x)\}\{l_1(x)-l_2(x)\}\mathrm{d}x=0,\ \forall g\in L^q(B_1).$$

经整理,得

$$\int_{B_1}g(x)\{[l_1(x)-l_2(x)]-P_{B_1}(l_1-l_2)(x)\}\mathrm{d}x=0,\forall g\in L^q(B_1).$$

因此,有

$$l_1(x)-l_2(x)=P_{B_1}(l_1-l_2)(x)\in\mathscr{P}_s,\ 当\ x\in B_1.$$

如置

$$l(x)=\begin{cases} l_1(x), & \text{当 } x\in B_1, \\ l_2(x)+P_{B_1}(l_1-l_2)(x), & \text{当 } x\in B_2\backslash B_1, \end{cases}$$

则不难看出

$$l(x)=l_2(x)+P_{B_1}(l_1-l_2)(x),\ \text{当 } x\in B_2.$$

容易验证，经此延拓方法得到的 $l(x)$ 满足

$$Lf=\int_{B_j}f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in L^q_{B_j}(j=1,\ 2).$$

同理可证，依上述延拓方法，可得一 $l(x)$，使得以上等式对任一 $j\in N$ 成立。

(iii) 最后证明：(ii)中构造的 $l\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}$，且

$$Lf=\int_{R^n}f(x)l(x)\mathrm{d}x,\ \forall f\in H_a^{p,q,s}.$$

最后的等式是容易验证的。事实上，(ii)中最后的等式对一切 $j\in N$成立，蕴含着等式

$$Lf=\int_{R^n}f(x)l(x)\mathrm{d}x$$

对一切$(p,\ q,\ s)$原子的有限线性组合 f 也成立。余下，只需给出 $l\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}$ 的证明。任取一球 B，以及任一 $f\in L^q(B)$，$\|f\|_q\leqslant 1$，且 $\operatorname{supp}f\subset B$。如置

$$a(x)=C^{-1}|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\{f(x)-(P_Bf)(x)\}\mathscr{X}_B(x),$$

则对适当的常数 C，$a(x)$ 成为一 $(p,\ q,\ s)$ 原子，且 $\operatorname{supp}a\subset B$。由等式

$$L_a=\int_B a(x)l(x)\mathrm{d}x$$

以及 $L\in(H_a^{p,q,s})'$，便得

$$\left|\int_B a(x)\{l(x)-(P_Bl)(x)\}\mathrm{d}x\right|\leqslant\|L\|.$$

上式可改写成

$$|B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left|\int_B f(x)\{l(x)-(P_Bl)(x)\}\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|L\|.$$

由此推出

$$|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left\{\int_B |l(x)-(P_B l)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}\leqslant C\|L\|.$$

因此，$l\in\mathscr{L}_{\frac{1}{p}-1,q',s}$，定理证毕。

关于 Campanato 空间的范数，存在着若干等价的形式。

命题 4.1 设 $g\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$，$\alpha>0$，$1\leqslant q'\leqslant\infty$，$s$ 为非负整数，以及 $\varepsilon>\max\{\alpha, \varepsilon/n\}$，则下列条件互相等价：

(i) $\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}<\infty$；

(ii) $$\|g\|^{*}_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}\triangleq\sup_B |B|^{-\alpha}\left\{\inf_{p\in\mathscr{P}_s}\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)-p(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}<\infty;$$

(iii) $$\|g\|^{**}_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}\triangleq\sup_{\rho>0,x_0\in\mathbb{R}^n}\rho^{-\alpha n}\left\{\inf_{p\in\mathscr{P}_s}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\rho^{\varepsilon n}|g(x)-p(x)|}{(\rho+|x-x_0|)^{n/q'+\varepsilon n}}\right]^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}<\infty.$$

证明 (iii)⇒(ii) 是显然的。以下，先证 (ii)⇒(i)。设 $p\in\mathscr{P}_s$，则

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)-(P_B g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\
&\leqslant\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)-p(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\
&\quad+\left(\frac{1}{|B|}\int_B |p(x)-(P_B g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\
&=\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)-p(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\
&\quad+\left(\frac{1}{|B|}\int_B |P_B(p-g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}.
\end{aligned}$$

由上式并使用引理 4.1 便得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)-(P_B g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\
&\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)-p(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}.
\end{aligned}$$

因此，(ii)⇒(i)的证明已告完成。余下，只需证明(i)⇒(iii)。

设 $\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}<\infty$。对任给的 $x_0\in\mathbb{R}^n$，以及 $\rho>0$，记 $B=B(x_0,\rho)$。将 $(P_Bg)(x)$ 表示成

$$(P_Bg)(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{a_\nu(x_0,\rho)}{\nu!}(x-x_0)^\nu,$$

其中 $a_\nu(x_0,\rho)=(D^\nu P_Bg)(x_0)$。如记 $B_m=B(x_0,2^m\rho)$，则

$$\begin{aligned}
&\rho^{-\alpha n}\left\{\inf_{p\in\mathscr{P}_s}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\rho^{\varepsilon n}|g(x)-p(x)|}{(\rho+|x-x_0|)^{n/q'+\varepsilon n}}\right]^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}\\
&\leqslant\rho^{-\alpha n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\rho^{\varepsilon n}|g(x)-(P_Bg)(x)|}{(\rho+|x-x_0|)^{n/q'+\varepsilon n}}\right]^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}\\
&\leqslant\rho^{-\alpha n}\left\{\left[\rho^{-n}\int_B|g(x)-(P_Bg)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right]^{1/q'}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_{B_m\setminus B_{m-1}}|g(x)-(P_Bg)(x)|^{q'}\frac{\rho^{\varepsilon nq'}}{(\rho+|x-x_0|)^{n+\varepsilon nq'}}\mathrm{d}x\right]^{1/q'}\right\}\\
&\leqslant C\rho^{-\alpha n}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-n\varepsilon m}\left(\frac{1}{|B_m|}\int_{B_m}|g(x)-(P_Bg)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\
&\leqslant C\rho^{-\alpha n}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-n\varepsilon m}\left\{\left(\frac{1}{|B_m|}\int_{B_m}|g(x)-(P_{B_m}g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{1}{|B_m|}\int_{B_m}|(P_{B_m}g)(x)-(P_Bg)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\right\}\\
&\leqslant C\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}+C\rho^{-\alpha n}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-n\varepsilon m}\sup_{x\in B_m}|(P_{B_m}g)(x)-(P_Bg)(x)|.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in B_m}|(P_{B_m}g)(x)-(P_Bg)(x)|\\
&=\sup_{|x-x_0|<2^m\rho}\left|\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{a_\nu(x_0,2^m\rho)-a_\nu(x_0,\rho)}{\nu!}(x-x_0)^\nu\right|\\
&\leqslant\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}|a_\nu(x_0,2^{j+1}\rho)-a_\nu(x_0,2^j\rho)|,
\end{aligned}$$

则可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in B_m}|(P_{B_m}g)(x)-(P_Bg)(x)|\\
&\leqslant\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}|D^\nu[(P_{B_{j+1}}g)(x_0)-(P_{B_j}g)(x_0)]|.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

容易证明：对任一$P\in\mathscr{P}_s$，有

$$|D^\nu P(x_0)|\leqslant Cr^{-|\nu|}\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}|P(t)|^{q'}\mathrm{d}t\right)^{1/q'}. \tag{4.3}$$

事实上，先设$x_0=0$，以及$r=1$。对任一$Q\in\mathscr{P}_s$，Q可以写成

$$Q(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{b_\nu}{\nu!}x^\nu,$$

其中$b_\nu=(D^\nu Q)(0)$。利用有限维空间$\mathscr{P}_s$上两范数

$$\|Q\|_*=\sup_{|\nu|\leqslant s}|b_\nu|$$

和

$$\|Q\|_{q'}=\left(\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}|Q(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}$$

的等价性，可得

$$|(D^\nu Q)(0)|\leqslant C\left\{\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}|Q(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}.$$

因此，当$x_0=0$及$r=1$时，(4.3)式成立。

对于一般情形，可将任一$P\in\mathscr{P}_s$写成

$$P(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{C_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu.$$

如置$Q(y)=P(x_0+ry)$，并使用上面对Q已得到的不等式，则立即推出(4.3)式。

将(4.3)式用于(4.2)式的右端，便得到

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in B_m}|(P_{B_m}g)(x)-(P_Bg)(x)|\\&\leqslant C\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}(2^j\rho)^{-|\nu|}\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|(P_{B_{j+1}}g)(x)\right.\\&\qquad\left.-(P_{B_j}g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\&\leqslant C\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}(2^j\rho)^{-|\nu|}\\&\quad\cdot\left\{\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|g(x)-(P_{B_{j+1}}g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|g(x)-(P_{B_j}g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\right\}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\rho^{n\alpha}\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{1}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}2^{(m-j)|\nu|+\alpha nj}.$$

因此，最终得到

$$\rho^{-\alpha n}\left\{\inf_{p\in\mathscr{P}_s}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\rho^{\varepsilon n}|g(x)-p(x)|}{(\rho+|x-x_0|)^{n/q'+\varepsilon n}}\right]^{q'}dx\right\}^{1/q'}$$

$$\leqslant C\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-n\varepsilon m}\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{1}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}2^{(m-j)|\nu|+\alpha nj}.$$

如注意到

$$\sum_{j=0}^{m-1}2^{(m-j)|\nu|+\alpha nj}\leqslant\begin{cases}2^{ms}m, & 当\ \alpha\leqslant s/n,\\ 2^{mn\alpha}m, & 当\ \alpha>s/n,\end{cases}$$

则得

$$\|g\|^{**}_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}\leqslant C\|g\|_{\mathscr{L}_{\alpha,q',s}}.$$

命题证毕。

§5 算子的插值

古典的 Marcinkiewicz 算子插值定理指出：设$1\leqslant p_1<p<p_2$，如果次线性算子T是弱(L^{p_1}, L^{p_1})型的和弱(L^{p_2}, L^{p_2})型的，则T必是(L^p, L^p)型的，其中p_1和p_2通称为插值的端点。一个自然出现的问题是当左端点$p_1<1$时，关于算子插值应有怎样的结论呢？下面的定理可以看成为上述 Marcinkiewicz 插值定理的拓广。

定理 5.1 设$0<p_1\leqslant 1<p_2\leqslant\infty$，且次线性算子$T$是弱$(H^{p_1}, L^{p_1})$型的和弱$(L^{p_2}, L^{p_2})$型的。

(i) 若$1<p<p_2$，则T为(L^p, L^p)型的；

(ii) 若$p_1<p\leqslant 1$，则T为(H^p, L^p)型的。

证明 (ii) 的证明将在本章 §8 中给出，这里只给出 (i) 的证明。首先，取q，满足$1<q<p$。设$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，并记

$$m_q f=(HL|f|^q)^{1/q}.$$

由 HL 极大函数的性质，不难得到

$$\|m_q f\|_p \leqslant C_{p,q,n}\|f\|_p. \tag{5.1}$$

记

$$\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : (m_q f)(x) > \alpha\}.$$

由引理 3.2 可得一列球 $\{B_i\} = \{B(x_i, r_i)\}$，使得 $\{B_i\}$ 满足引理中的性质(i)、(ii)及(iii)。又记 $\mathscr{X}_i(x) = \mathscr{X}_{B_i}(x)$，以及

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \mathscr{X}_i(x)/\sum_j \mathscr{X}_j(x), & \text{当 } x \in \Omega_\alpha, \\ 0, & \text{当 } x \notin \Omega_\alpha. \end{cases}$$

如置

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \notin \Omega_\alpha, \\ \sum_i (P_{B_i} f\eta_i)(x)\mathscr{X}_i(x), & \text{当 } x \in \Omega_\alpha, \end{cases}$$

以及

$$h(x) = \sum_i h_i(x) \triangleq \sum_i \{f(x)\eta_i(x) - (P_{B_i} f\eta_i)(x)\mathscr{X}_i(x)\},$$

则 $f(x) = g(x) + h(x)$。由 $\{B_i\}$ 所满足的性质(ii)，可知存在一 $w \in B(x_i, 54r_i) \cap \Omega^c$。因此，由引理 4.1 得

$$\begin{aligned} |h_i(x)| &\leqslant |f(x)| + C\left(\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i} |f(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \mathscr{X}_i(x) \\ &\leqslant |f(x)| + C\left(\frac{1}{|B(x_i, 54r_i)|}\int_{B(x_i, 54r_i)} |f(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \mathscr{X}_i(x) \\ &\leqslant |f(x)| + C(m_q f)(w)\mathscr{X}_i(x) \leqslant |f(x)| + C\alpha\mathscr{X}_i(x). \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i} |h_i(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} &\leqslant \left(\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i} |f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} + C\alpha \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{|B(x_i, 54r_i)|}\int_{B(x_i, 54r_i)} |f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} + C\alpha. \end{aligned}$$

因此，

$$\left(\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i} |h_i(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C\alpha. \tag{5.2}$$

如记

$$a_i(x) = h_i(x)/C\alpha|B_i|^{1/p_1},$$

其中 C 为(5.2)式右端的常数，则 a_i 为一(p_1, q, s)原子。因此，

$$h(x)=C\alpha\sum_i|B_i|^{1/p_1}a_i(x)\in H_\alpha^{p_1,q,s},$$

且

$$\|h\|_{H_\alpha^{p_1,q,s}}\leqslant C\alpha\Big(\sum_i|B_i|\Big)^{1/p_1}\leqslant C\alpha|\Omega_\alpha|^{1/p_1}. \tag{5.3}$$

同理可证

$$|g(x)|\leqslant C\alpha,\ 当\ x\in\Omega_\alpha.$$

但当 $x\notin\Omega_\alpha$ 时，

$$|g(x)|=|f(x)|\leqslant(m_q f)(x)\leqslant\alpha.$$

因此，总有

$$|g(x)|\leqslant C\alpha,\ \text{a.e.}\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{5.4}$$

为证定理 5.1 的(i)，需要分别考虑两种情形：$p_2<\infty$ 和 $p_2=\infty$。当 $p_2<\infty$ 时，由假设得

$$\begin{aligned}p^{-1}\|Tf\|_p^p&=\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\{y:|Tf(y)|>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\\&\leqslant\int_0^\infty\alpha^{p-1}(|\{y:|Tg(x)|>\alpha/2\}|+|\{y:|Th(x)|>\alpha/2\}|)\mathrm{d}\alpha\\&\leqslant C\left\{\int_0^\infty\alpha^{p-1}(\|g\|_{p_2}/\alpha)^{p_2}\mathrm{d}\alpha+\int_0^\infty\alpha^{p-1}(\|h\|_{H^{p_1}}/\alpha)^{p_1}\mathrm{d}\alpha\right\}.\end{aligned}$$

由(5.3)和(5.1)式容易得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\alpha^{p-1}(\|h\|_{H^{p_1}}/\alpha)^{p_1}\mathrm{d}\alpha\leqslant C\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\Omega_\alpha|\mathrm{d}\alpha\\&=C\|m_q f\|_p^p\leqslant C\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

其次，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\alpha^{p-1}(\|g\|_{p_2}/\alpha)^{p_2}\mathrm{d}\alpha\\&=\int_0^\infty\alpha^{p-p_2-1}\left(\int_{\Omega_\alpha}|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x+\int_{\Omega_\alpha^c}|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

由(5.4)式直接得到

$$\int_0^\infty\alpha^{p-p_2-1}\left(\int_{\Omega_\alpha}|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha\leqslant C\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\Omega_\alpha|\mathrm{d}\alpha\leqslant C\|f\|_p^p.$$

但

$$\int_0^\infty \alpha^{p-p_2-1}\left(\int_{\Omega_\alpha^c}|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant\int_0^\infty \alpha^{p-p_2-1}\left(\int_{\{m_Q f(x)\leqslant\alpha\}}|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int|f(x)|^{p_2}\left(\int_{(m_Q f)(x)}^\infty \alpha^{p-p_2-1}\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int|f(x)|^{p_2}\left(\int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-p_2-1}\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}x=1/(p_2-p)\|f\|_p^p.$$

综合以上各式，得

$$\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

考虑 $p_2=\infty$ 的情形，此时，由(5.4)式可得

$$\|Tg\|_\infty\leqslant C\|g\|_\infty\leqslant C_0\alpha.$$

因此

$$p^{-1}\|Tf\|_p^p=\int_0^\infty \beta^{p-1}|\{y.\ |Tf(y)|>\beta\}|\mathrm{d}\beta$$

$$=C\int_0^\infty \alpha^{p-1}|\{y:|Tf(y)|>2C_0\alpha\}|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \alpha^{p-1}|\{y:|Th(y)|>C_0\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\leqslant C\|f\|_p^p.$$

这就完成了定理之(i)的证明。

需要指出：当插值端点 $p_1=1$ 和 $p_2=\infty$ 时，还有一个既不同于 Marcinkiewicz 定理，也不同于定理 5.1 的算子插值定理，它可表述如下。

定理 5.2 设次线性算子 T 为(H^1, L^1)型的和$(L_c^\infty, \mathrm{BMO})$型的，其中 L_c^∞ 为具有紧支集的有界可测函数空间，则 T 也是 (L^p, L^p)型的，其中 $1<p<\infty$。

在证明定理之前，需要对BMO函数作若干进一步的说明。设 $f\in \mathrm{BMO}(R^n)$，即

$$\|f\|_*=\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(t)-f_Q|\mathrm{d}t<\infty.$$

如记 f 的 sharp 函数为

$$f^*(x)=\sup_{Q_x}\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x}|f(t)-f_{Q_x}|\mathrm{d}t,$$

其中Q_x为包含x的立方体。不难看出：$f\in \mathrm{BMO}$当且仅当$f^*\in L^\infty$，且$\|f\|_*\sim\|f^*\|_\infty$。

现在，回忆一下Calderón-Zygmund分解引理(引理2.1)：若$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则对任一$\lambda>0$，存在$\mathbb{R}^n$的分解$\mathbb{R}^n=Q^\lambda\cup P^\lambda$，满足

(i) $Q^\lambda=\bigcup_{k=1}^\infty Q_k^\lambda$，其中$Q_k^\lambda$互不重叠，且

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda,$$

(ii) $|f(x)|\leqslant\lambda$, a.e. $x\in P^\lambda$.

上述$\mathbb{R}^n$的分解叫做函数$f(x)$按高度λ的CZ分解，为方便起见，记$\mu_f(\lambda)=|Q^\lambda|=\sum_{k=1}^\infty|Q_k^\lambda|$。

引理 5.1 若$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$|\{x\in\mathbb{R}^n: HL(f)(x)>5^n\lambda\}|\leqslant 2^n\mu_f(\lambda).$$

证明 首先证明不等式

$$HL(f)(x)\leqslant 5^n\lambda,\text{ 当 } x\notin\bigcup_k(2Q_k^\lambda), \tag{5.5}$$

其中$2Q$为Q的2倍同心扩张。设$Q(x)$为任一以x为中心的立方体，则当$Q(x)\subset P^\lambda$时，(5.5)式显然成立。以下设$Q(x)\not\subset P^\lambda$。从而，$Q(x)\cap Q^\lambda\neq\phi$。因此，存在一$k$，使得$Q(x)\cap Q_k^\lambda\neq\phi$。但$x\notin\bigcup_k(2Q_k^\lambda)$，由此推出：对上述的$k$，$Q_k^\lambda\subset 2Q(x)$。因此，

$$\sum_{k:Q(x)\cap Q_k^\lambda\neq\phi}|Q_k^\lambda|\leqslant|2Q(x)|=2^n|Q(x)|.$$

由此得到

$$\int_{Q(x)}|f(t)|\mathrm{d}t=\int_{Q(x)\cap P^\lambda}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{Q(x)\cap Q^\lambda}|f(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\lambda|Q(x)|+\sum_{k:Q(x)\cap Q_k^\lambda\neq\phi}2^n\lambda|Q_k^\lambda|\leqslant 5^n\lambda|Q(x)|.$$

因此，(5.5)式成立。由(5.5)式便推出

$$\begin{aligned}&|\{x\in\mathbb{R}^n: HL(f)(x)>5^n\lambda\}|\\&=|\{x\in\bigcup_k(2Q_k^\lambda): HL(f)(x)>5^n\lambda\}|\\&\leqslant|\bigcup_k(2Q_k^\lambda)|=2^n\mu_f(\lambda).\end{aligned}$$

引理证毕。

引理 5.2 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha>0$, 以及 $\beta>0$, 则

$$\mu_f(\alpha)\leqslant|\{x: f^*(x)>\alpha\beta/2\}|+\beta\mu_f(2^{-n-1}\alpha).$$

证明 记 $\gamma=2^{-n-1}\alpha$. 函数 f 分别按高度 ν 和 α 作 $\mathbb{R}^n$ 的 CZ 分解。由于 $\nu<\alpha$, 则从引理 2.1 的证明可知：对应于高度 α 的 CZ 分解中的任一立方体 Q_k^α 必包含在对应于 γ 的 CZ 分解中某一立方体 Q_j^γ 内。因此，如记

$$I=\bigcup_{j\in J}Q_j^\gamma,\ \text{其中}\ J=\{j: Q_j^\gamma\subset\{x: f^*(x)>\alpha\beta/2\}\},$$

以及

$$\mathrm{II}=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j^\gamma\setminus I,$$

则

$$\mu_f(\alpha)=\sum_k|Q_k^\alpha|=\sum_{Q\in I}\Big(\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|\Big)+\sum_{Q\in \mathrm{II}}\Big(\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|\Big).$$

当 $Q\in\mathrm{II}$ 时，必存在 $x\in Q$, 使得

$$f^*(x)\leqslant\alpha\beta/2.$$

因此，

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(t)-f_Q|\,dt\leqslant\alpha\beta/2,\ \text{当}\ Q\in\mathrm{II}.$$

但由引理 2.1, 得

$$|f_Q|\leqslant2^n\gamma=\alpha/2.$$

因此，当 $Q\in\mathrm{II}$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|&<\frac{1}{\alpha}\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}\int_{Q_k^\alpha}|f(t)|\,dt\\&\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}\int_{Q_k^\alpha}|f(t)-f_Q|\,dt+\frac{1}{\alpha}|f_Q|\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|\\&\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_Q|f(t)-f_Q|\,dt+\frac{1}{2}\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|.\end{aligned}$$

由此推出

$$\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|<\beta|Q|,\ \text{当}\ Q\in\mathrm{II}.$$

因此

$$\sum_{Q\in II}\Big(\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|\Big)<\beta\sum_{Q\in II}|Q|\leqslant\beta\mu_f(\gamma).$$

其次，

$$\sum_{Q\in I}\Big(\sum_{Q_k^\alpha\subset Q}|Q_k^\alpha|\Big)\leqslant\sum_{Q\in I}|Q|\leqslant|\{x:f^*(x)>\alpha\beta/2\}|.$$

以上两式便蕴含着引理的结论，证毕。

定理5.2的证明 记

$$L_0^\infty=\{f\in L_0^\infty:\int f(x)\mathrm{d}x=0\},$$

不难证明 L_0^∞ 在 L^p 中稠密，其中 $1<p<\infty$。因此，为证定理，只需证明

$$\|Tf\|_p\leqslant C_{p,n}\|f\|_p,\ \forall f\in L_0^\infty.$$

当 $f\in L_0^\infty$ 时，f 显然是 $(1,\infty,0)$ 原子的常数倍。由定理的条件可知 $Tf\in L^1$。再由引理5.1和引理5.2，得

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p&\leqslant\|HL(Tf)\|_p^p=P\int_0^\infty\lambda^{p-1}|\{x:HL(Tf)(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant5^{np}2^np\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu_{Tf}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&\leqslant5^{np}2^np\Big\{\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\{x:(Tf)^*(x)>\alpha\beta/2\}|\mathrm{d}\alpha\\&\quad+\beta\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu_{Tf}(2^{-n-1}\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big\}\\&\leqslant5^{np}2^np\Big\{(2/\beta)^p\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\{x:(Tf)^*(x)>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\\&\quad+\beta\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu_{Tf}(2^{-n-1}\alpha)\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

如取 $\beta=2^{-(n+1)p-1}$，则得

$$\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu_{Tf}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant C\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\{x:(Tf)^*(x)>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha,$$

其中 C 仅依赖于 p 和 n。因此，余下只需证明

$$\|(Tf)^*\|_p\leqslant C_{p,n}\|f\|_p,\ \forall f\in L_0^\infty.$$

由 Marcinkiewicz 插值定理，也只需证明

$$|\{x:(Tf)^*(x)>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_p/\lambda)^p,\ \forall f\in L_0^\infty. \qquad (5.6)$$

记 $\{Q_j\}$ 为函数 $|f|^p$ 按高度 λ^p 的 CZ 分解中的立方体序列。显然，

$$\sum_j|Q_j|\leqslant(\|f\|_p/\lambda)^p,$$

以及

$$m_{Q_j}(|f|^p)\triangleq\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant 2^n\lambda^p.$$

将 f 写成

$$f=b+g\triangleq\sum_{j=1}^{\infty}(f-m_{Q_j}f)\mathscr{X}_{Q_j}+g\triangleq\sum_{j=1}^{\infty}f_j+g.$$

显然，$g\in L_c^\infty$，且

$$\|g\|_\infty\leqslant 2^{n/p}\lambda.$$

因 T 为 $(L_c^\infty,\ \mathrm{BMO})$ 型的，故存在一常数 B，使得

$$\|Tg\|_*\leqslant B\lambda,\ \text{或者}\ (Tg)^*(x)\leqslant B\lambda.$$

由此推出

$$|\{x:(Tf)^*(x)>(B+1)\lambda\}|\leqslant|\{x:(Tb)^*(x)>\lambda\}|.$$

因此，为证(5.6)式，只需证明

$$|\{x:(Tb)^*(x)>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_p/\lambda)^p,\ \forall f\in L_0^\infty.$$

注意到 $\|f_j\|_p\leqslant 2|Q_j|^{1/p}\{m_{Q_j}(|f|^p)\}^{1/p}\leqslant C\lambda|Q_j|^{1/p}$，不难看出 $(1/C\lambda|Q_j|)f_j$ 为一 $(1,\ p,\ 0)$ 原子。因此，

$$\|b\|_{H_a^{1,p,0}}\leqslant C\lambda\sum_j|Q_j|.$$

再注意到

$$(Tb)^*(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|(Tb)(t)-(Tb)_Q|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|(Tb)(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2HL(Tb)(x),$$

由此推得

$$|\{x:(Tb)^*(x)>\lambda\}|\leqslant|\{x:HL(Tb)(x)>\lambda/2\}|$$
$$\leqslant C\|Tb\|_1/\lambda\leqslant C\|b\|_{H^1}/\lambda\leqslant C\sum_j|Q_j|$$
$$\leqslant C(\|f\|_p/\lambda)^p.$$

到此，定理证毕。

如所周知，Stein曾引进容许的解析算子概念，并在$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$上对一族容许的解析算子建立了插值定理（参见E. M. Stein, G. Weiss [SW 2]）。下面的定理是上述插值定理在$H^p(\mathbb{R}^n)(0<p\leqslant 1)$上的拓广形式。

定理5.3 设$0<p_0<p_1\leqslant 1$，$S=\{z\in\mathbb{C}: 0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1\}$，以及$\{T_z, z\in S\}$为一族容许的解析算子，若不等式

$$\|T_{j+iy}f\|_{p_j}\leqslant A_j\|f\|_{H^{p_j}},\ j=0,1,$$

对一切的$f\in H^{p_j}\cap L^{p_j}$成立，其中$-\infty<y<\infty$，则对每一$\theta\in[0,1]$，有

$$\|T_\theta f\|_r\leqslant A_0^{1-\theta}A_1^\theta\|f\|_{H^r},\ \forall f\in H^r,$$

其中$1/r=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$。

定理的证明是基于下面一个引理上的。

引理5.3 设$0<p_0<p_1\leqslant 1$，且非负整数$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$。若$a$为一$(r,\infty,s)$原子，其中$1/r=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$，及$0<\theta<1$，则存在一解析函数$h(z)$，使得

$$\|h(iy)\|_{H^{p_0}}\leqslant 1,\ \|h(1+iy)\|_{H^{p_1}}\leqslant 1,$$

以及

$$h(\theta)=a.$$

证明 设$\operatorname{Supp} a\subset B$，并置

$$h(z)=|B|^{\alpha(z)}a,$$

其中$\alpha(z)=(1/r-1/p_0)(1-z)+(1/r-1/p_1)z$。容易验证

$$\operatorname{Re}(\alpha(iy))=1/r-1/p_0,\ \operatorname{Re}(\alpha(1+iy))=1/r-1/p_1,$$

以及$\alpha(\theta)=0$。当a为一(r,∞,s)原子时，$|B|^{1/r-1/p_0}a$为一(p_0,∞,s)原子，且

$$\|h(iy)\|_{H^{p_0}}=\||B|^{\alpha(iy)}a\|_{H^{p_0}}=\||B|^{1/r-1/p_0}a\|_{H^{p_0}}\leqslant 1.$$

同理可得

$$\|h(1+iy)\|_{H^{p_1}}\leqslant 1.$$

最后，由$\alpha(\theta)=0$便推出$h(\theta)=a$，引理证毕。

定理 5.3 的证明 取一 k，使得 $kp_0>r$，并取一非负简单函数 g，使得 $\|g\|_{k'}\leqslant 1$，$1/k+1/k'=1$。构作函数

$$F(z)=\int_{\mathbb{R}^n}|\{g(x)\}^{\beta(z)}||(T_z h(z))(x)|^{r/k}dx,$$

其中 $\beta(z)=k'-(k'r/k)\{(1-z)/p_0+z/p_1\}$，$h$ 为引理 5.3 中的解析函数。不难验证 $\beta(\theta)=1$，

$$\mathrm{Re}\{\beta(iy)\}=k'(kp_0-r)/kp_0,$$

以及

$$\mathrm{Re}\{\beta(1+iy)\}=k'(kp_1-r)/kp_1.$$

对指标 kp_0/r 使用 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}|F(iy)|&\leqslant\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|T_{iy}h(iy)(x)|^{p_0}dx\right\}^{r/kp_0}\\&\quad\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^{k'}dx\right\}^{(kp_0-r)/kp_0}\\&\leqslant\|T_{iy}(h_{iy})\|_{p_0}^{r/k}.\end{aligned}$$

由此推出 $|F(iy)|\leqslant A_0^{r/k}$。同理可得 $|F(1+iy)|\leqslant A_1^{r/k}$。因此，据三线引理的拓广形式(参见 [SW 2])，有

$$\begin{aligned}\log|F(\theta)|&\leqslant\frac{1}{2}\sin\pi\theta\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log|F(iy)|}{\cosh\pi y-\cos\pi\theta}\right.\\&\quad\left.+\frac{\log|F(1+iy)|}{\cosh\pi y+\cos\pi\theta}\right\}dy\\&\leqslant(1-\theta)\log A_0^{r/k}+\theta\log A_1^{r/k}.\end{aligned}$$

由此推出

$$|F(\theta)|\leqslant A_0^{r(1-\theta)/k}A_1^{r\theta/k}.$$

上式蕴含着对任一 (r,∞,s) 原子 a，有

$$\|T_\theta a\|_r\leqslant A_0^{1-\theta}A_1^\theta.$$

因此，定理的结论对任一 (r,∞,s) 原子已成立。对一般的 $f\in H^r=H_a^{r,\infty,s}$，有

$$f\overset{S'}{=}\sum_j\lambda_j a_j,$$

其中每一 a_j 为 (r,∞,s) 原子，且 $\Sigma|\lambda_j|^r<\infty$。因此，

$$\|T_\theta f\|_r^r\leqslant\Sigma|\lambda_j|^r\|T_\theta a_j\|_r^r\leqslant(A_0^{1-\theta}A_1^\theta)^r\Sigma|\lambda_j|^r.$$

定理证毕。

§6　H^p 空间的插值与弱 H^p 空间

设 X_1 和 X_2 为两个嵌入到某拓扑空间内的拟范线性空间。所谓 X_1 和 X_2 的直和空间 X_1+X_2，是指

$$X_1+X_2=\{f: f=f_1+f_2,\ f_1\in X_1 \text{ 及 } f_2\in X_2\}.$$

X_1+X_2 上的 K 泛函 $K(t;f,X_1,X_2)\triangleq K(t;f)$ 被定义为

$$K(t;f)=\inf_{f=f_1+f_2}(\|f_1\|_{X_1}+t\|f_2\|_{X_2}),\ t>0.$$

借助 K 泛函，可在 X_1 和 X_2 之间进行插值。

定义 6.1　设 $0<\theta<1$，且 $0<q\leqslant\infty$。所谓 X_1 和 X_2 的插值空间 $(X_1,X_2)_{\theta,q}$，是指

$$(X_1,X_2)_{\theta,q}=\Big\{f\in X_1+X_2: \|f\|_{\theta,q}\triangleq\Big(\int_0^\infty[t^{-\theta}K(t;f)]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}<\infty\Big\}.$$

关于空间插值的一个经典结果是

$$(L^{p_0},L^{p_1})_{\theta,p}=L^p,$$

其中 $1\leqslant p_0,p_1\leqslant\infty$，$1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$，及 $0<\theta<1$。有关空间插值的详细论述可参见 J. Bergh, J. Löfström [BL 1]。

本节的前一部分是要将上述的经典结果推广到 H^p 空间上去。为此，先建立一个辅助引理。

引理 6.1　设 $0<p_0\leqslant1$，$\delta>0$，$m>n/p_0$，以及 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 f 可表示为 $f=g+b$，其中 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\|b\|_\infty\leqslant c\delta$，$g\in H^{p_0}(\mathbb{R}^n)$，以及

$$\|g\|_{H^{p_0}}^{p_0}\leqslant C\int_{\{x: f_m^*(x)>\delta\}}|f_m^*(x)|^{p_0}dx,$$

其中 C 与 f 无关。

证明　依命题3.3的证明中对 f 分解的方法，如以 $\Omega=\{x: f_m^*(x)>\delta\}$ 代替那里的 $\Omega_k=\{x: f_m^*(x)>2^k\}$，则得 f 的一分解 $f=g+b$，其中

$$b(x)=f(x)\mathscr{X}_{\Omega^c}(x)+\sum_i P_i(x)\zeta_i(x),$$

以及

$$g(x)=\sum_i[f(x)-P_i(x)]\zeta_i(x),$$

这里 $P_i\in\mathscr{P}_m$。注意到当 $\delta=2^k$ 时，这里的 $P_i(x)$、$\zeta_i(x)$、$g(x)$ 和 $b(x)$ 分别是命题 3.3 证明中的 $P_i^k(x)$, $\zeta_i^k(x)$, $g^k(x)$ 和 $b^k(x)$。因此，如同命题 3.3 的证明，可得

$$|b(x)|\leqslant C\delta.$$

为证引理结论中的最后一式，将 g 写成

$$g(x)=\sum_i[f(x)-P_i(x)]\zeta_i(x)\triangleq\sum_i g_i(x).$$

下面，先估计 g_i 的径向极大函数 g_i^+：

$$g_i^+(x)=\sup_{t>0}|(g_i*\psi_t)(x)|,$$

其中 $\psi\in C_c^\infty$, $\operatorname{supp}\psi\subset B(0,1)$，且 $\|\psi\|_{k_m}\leqslant 1$。由引理 3.3 之前关于 ζ_i 的构造，明显看出 $\operatorname{supp}g_i\subset\operatorname{supp}\zeta_i\subset B(x_i,2r_i)$。由于对每一 g_i 的处理方法是相同的，并且同 x_i 的位置无关，故可设 $x_i=0$。以下，将 $B(x_i,2r_i)$ 写成 $\widetilde{B}_i$，并分别考虑三种情形。

情形 1 $x\in\widetilde{B}_i$，且 $t\leqslant r_i$。此时，由 ζ_i 的构造以及 $\|\psi\|_{k_m}\leqslant 1$，不难知道 $\Phi(z)=\psi(z)\zeta_i(x-tz)$ 满足以下性质：$\operatorname{supp}\Phi\subset B(0,4)$，$\|D^\gamma\Phi\|_\infty\leqslant C_\gamma$, $\forall\gamma\in\mathbb{Z}_+^n$，以及 $\|\Phi\|_{k_m}\leqslant C$。因此，

$$\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)f(y)\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|$$
$$=|(f*\Phi_t)(x)|\leqslant Cf_m^*(x).$$

注意到 $x\in\widetilde{B}_i\subset\Omega$，则

$$\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)P_i(y)\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant C\|P_i\|_\infty<C\delta\leqslant Cf_m^*(x).$$

因此，$g_i^+(x)\leqslant Cf_m^*(x)$。

情形 2 $x\in\widetilde{B}_i$，且 $t>r_i$。此时，易知 $\Phi(z)=\psi(r_iz/t)\cdot\zeta_i(x-r_iz)$ 满足以下性质：$\operatorname{supp}\Phi\subset B(0,4)$，以及 $\|\Phi\|_{k_m}\leqslant C$。因此，

$$\begin{aligned}&\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)f(y)\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|\\ \leqslant&\left|r_i^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)f(y)\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|\\ =&|(f*\Phi_{r_i})(x)|\leqslant Cf_m^*(x).\end{aligned}$$

同情形1一样，有

$$\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)P_i(y)\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant Cf_m^*(x).$$

因此，$g_i^+(x)\leqslant Cf_m^*(x)$。

情形3 $x\notin\tilde{B}_i$。此时，当 $|x|\geqslant 2t$ 时，由 $\operatorname{supp}\psi\subset B(0,1)$ 可知

$$(g_i*\psi_t)(x)=t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)[f(y)-P_i(y)]\zeta_i(y)\mathrm{d}y=0.$$

因此，以下不妨设 $|x|<2t$。将 $\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)$看成 y 的函数，并写成

$$\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)=Q_m(y)+R(y),$$

其中 $Q_m(y)$ 为 $\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)$关于 y 的 m 阶 Taylor 多项式，易知 $R(y)$ 满足

$$|D^\gamma R(y)|\leqslant C_\gamma r_i^{-|\gamma|}(r_i/|x|)^{m+1}.$$

因此，由(3.5)式可得

$$\begin{aligned}&\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)[f(y)-P_i(y)]\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|\\ =&\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}R(y)[f(y)-P_i(y)]\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|.\end{aligned}$$

据引理3.2结论中的(ii)，可取一 $y_i\in B(x_i,54r_i)\cap\Omega^c$。不难验证 $\Phi(z)=R(y_i-r_iz)\zeta_i(y_i-r_iz)$ 满足以下条件：$\operatorname{supp}\Phi\subset B(0,56)$，$|D^\gamma\Phi(z)|\leqslant C_\gamma(r_i/|x|)^{m+1}$，以及 $\|\Phi\|_{k_m}\leqslant C(r_i/|x|)^{m+1}$。因此，

$$\begin{aligned}&\left|t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}R(y)f(y)\zeta_i(y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\left|r_i^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}R(y)f(y)\zeta_i(y)\,\mathrm{d}y\right|\\ =&|(f*\Phi_{r_i})(y_i)|\leqslant C(r_i/|x|)^{m+1}f_m^*(y_i)\leqslant C\delta(r_i/|x|)^{m+1}.\end{aligned}$$

注意到

$$\left|t^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}R(y)P_i(y)\zeta_i(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\|P_i\|_\infty\|\Phi\|_{L_m}$$
$$\leqslant C\delta(r_i/|x|)^{m+1}.$$

因此，$g_i^+(x)\leqslant C\delta(r_i/|x|)^{m+1}$。

综合以上三种情形，在一般情形下，总有

$$g_i^+(x)\leqslant Cf_m^*(x)\mathscr{X}_{\widetilde{B}_i}(x)+C\delta(r_i/|x-x_i|)^{m+1}\mathscr{X}_{\widetilde{B}_i^c}(x).$$

由此推出

$$\|g_i^+\|_{p_0}^{p_0}\leqslant C\int_{\widetilde{B}_i}[f_m^*(x)]^{p_0}\mathrm{d}x+C\delta^{p_0}\int_{\widetilde{B}_i^c}(r_i/|x-x_i|)^{(m+1)p_0}\mathrm{d}x.$$

注意到 $(m+1)p_0>n$，则

$$\delta^{p_0}\int_{\widetilde{B}_i^c}\left(\frac{r}{|x-x_i|}\right)^{(m+1)p_0}\mathrm{d}x=\delta^{p_0}r_i^n\int_{|u|>2}\frac{\mathrm{d}u}{|u|^{(m+1)p_0}}$$
$$\leqslant C\delta^{p_0}|B_i|\leqslant C\int_{\widetilde{B}_i}[f_m^*(x)]^{p_0}\mathrm{d}x.$$

因此，

$$\|g_i^+\|_{p_0}^{p_0}\leqslant C\int_{\widetilde{B}_i}[f_m^*(x)]^{p_0}\mathrm{d}x.$$

由上式和引理 3.2，便得到

$$\|g^-\|_{p_0}^{p_0}\leqslant C\sum_i\int_{\widetilde{B}_i}[f_m^*(x)]^{p_0}\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}\mathscr{X}_\Omega(x)[f_m^*(x)]^{p_0}\mathrm{d}x.$$

引理证毕。

定理 6.1 设 $0<p_0<p_1\leqslant\infty$，$0<\theta<1$，则

$$(H^{p_0},H^{p_1})_{\theta,p}=H^p,$$

其中 $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$。

证明 下面只给出 $p_1=\infty$ 时的证明(事实上，据[BL 1]的定理 3.11.5，可将一般的 p_1 归结于 $p_1=\infty$ 情形)。此外，不妨设 $0<p_0\leqslant1$。否则，定理的结论即为已知的经典结果。

显然，算子 $f\mapsto f_m^*$ 为 (L^∞, L^∞) 型的。其次，由第一章定理 3.1 还知它是 (H^{p_0}, L^{p_0}) 型的。因此，上述算子将 $(H^{p_0}, L^\infty)_{\theta,p}$ 映射到 $(L^{p_0}, L^\infty)_{\theta,p}=L^p$ 中，因此，

$$(H^{p_0}, L^\infty)_{\theta,p}\subset H^p.$$

为证反向包含关系，由注3.4而只需证明

$$H^p\cap L^1\subset(H^{p_0}, L^\infty)_{\theta,p}.$$

任取 $f\in H^p\cap L^1$，并记 $\tilde{f}^*_m$ 为 f^*_m 的非增重排函数．对任一 $t>0$，在引理6.1中取 $\delta=\tilde{f}^*_m(t^{p_0})$，得到 f 的分解 $f=g_t+b_t$，并满足

$$\|b_t\|_\infty\leqslant C\tilde{f}^*_m(t^{p_0}),$$

以及

$$\|g_t\|^{p_0}_{H^{p_0}}\leqslant C\int_{\{x:f^*_m(x)>\tilde{f}^*_m(t^{p_0})\}}[f^*_m(x)]^{p_0}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_0^{t^{p_0}}[\tilde{f}^*_m(\alpha)]^{p_0}\mathrm{d}\alpha.$$

因此，分别得到

$$\int_0^\infty(t^{-\theta}t\|b_t\|_\infty)^p\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\int_0^\infty[t^{1-\theta}\tilde{f}^*_m(t^{p_0})]^p\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=C\int_0^\infty[\tilde{f}^*_m(t)]^p\mathrm{d}t=C\|f^*_m\|^p_p,$$

以及

$$\int_0^\infty(t^{-\theta}\|g_t\|_{H^{p_0}})^p\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\int_0^\infty t^{-\theta p}\Big(\int_0^{t^{p_0}}[\tilde{f}^*_m(x)]^{p_0}\mathrm{d}x\Big)^{p/p_0}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=C\int_0^\infty t^{-\theta p/p_0}\Big(\int_0^t[\tilde{f}^*_m(\alpha)]^{p_0}\mathrm{d}\alpha\Big)^{p/p_0}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

对最后一式右端使用Hardy不等式，便得

$$\int_0^\infty(t^{-\theta}\|g_t\|_{H^{p_0}})^p\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\int_0^\infty t^{p(1-\theta)/p_0}[\tilde{f}^*_m(t)]^p\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=C\|f^*_m\|^p_p.$$

注意到 $K(t;f)\leqslant\|g_t\|_{H^{p_0}}+t\|b_t\|_\infty$，由以上各式不难看出

$$\|f\|_{\theta,p}\leqslant C\|f^*_m\|_p.$$

定理证毕．

注6.1 定理6.1的结论还可以拓广成

$$(H^{p_0}, H^{p_1})_{\theta,q}=H(p, q),$$

其中 $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$，及 $0<q\leqslant\infty$．其证明同定理6.1的相仿．

注 6.2 据[BL 1]的定理 3.11.5，还可以将注 6.1 的结论拓广成

$$(H(p_0, q_0), H(p_1, q_1))_{\theta,q} = H(p, q),$$

其中 $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$，$0<\theta<1$，以及 $0<q\leqslant\infty$。

由注 6.2 看出：如在 H^p 和 $H(p, \infty)$ 之间插值，便可得到 $H(p, q)$。因此，从空间插值的观点来看，$H(p, \infty)$ 起着特殊的角色，它常被称为弱 H^p 空间。下面，将对它作进一步的讨论。

从第 1 章 §1 知道，弱 H^p 空间的定义是

$$H(p, \infty, \mathbb{R}^n) = \{f\in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n): P^*_\nabla(f)\in L(p, \infty, \mathbb{R}^n)\},$$

其中 $P^*_\nabla(f)$ 可以用 $P^*_+(f)$，$\varphi^*_+(f)$，$\varphi^*_\nabla(f)$，以及 f^*_m 中的任一个来代替。据注 6.1，有

$$(H^{p_0}, H^{p_1})_{\theta,\infty} = H(p, \infty),$$

其中 $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$，及 $0<\theta<1$。因此，如赋予直和空间 $H^{p_0} + H^{p_1}$ 如下的"范数"：

$$\|f\|_{H^{p_0}+H^{p_1}} = \inf_{f=g+h}\{\|g\|_{H^{p_0}} + \|h\|_{H^{p_1}}\},$$

则不难证明，对任一 $f\in H(p, \infty)$，有

$$\lim_{t\to 0}(f*P_t) = f,$$

其中等式是在依 f 关于 $H^{p_0}+H^{p_1}$ 的范数意义下成立的。下面，将"依 $H^{p_0}+H^{p_1}$ 的范数意义下成立"简称为"在 $H^{p_0}+H^{p_1}$ 中成立"。

本节后一部分旨在给出空间 $H(p, \infty, \mathbb{R}^n)$ 的原子分解结构。

定理 6.2 设 $f\in H(p, \infty, \mathbb{R}^n)$，$p_0<p<1$，则存在一列有界函数 $\{f_k\}_{-\infty}^{\infty}$，具有如下性质：

(i) $f=\sum_k f_k$，在 $H^{p_0}+H^1$ 中成立；

(ii) 每一 f_k 又可分解为 $f_k=\sum_i h_i^k$，而 h_i^k 满足

1) $\operatorname{supp} h_i^k\subset$ 球 B_i^k，$\sum_i |B_i^k|\leqslant C_1 2^{-kp}$，且 $\sum_i \mathscr{X}_{B_i^k}(x)\leqslant C$；

2) $\|h_i^k\|_\infty\leqslant C2^k$；

3) $\int h_i^k(x)x^\beta dx=0$, $|\beta|\leqslant s$, 且非负整数 $s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$.

其中常数 C 和 C_1 同 k、i 无关。反之，若 $f\in\mathscr{S}'$，且满足 (i) 和 (ii)，则 $f\in H(p,\infty,R^n)$。此外，$\|f\|_{H(p,\infty)}\sim C_1$。

注 6.3　当 $p=1$ 时，定理的结论也成立，但(i)中的等式应当改为在 $H^{p_0}+L^2$ 中成立。

定理 6.2 的证明　证明的方法本质上同命题3.3的是一致的。如记 $u(x,t)=(f*P_t)(x)$，并设 $f\in H(p,\infty)$，则

$$\lim_{t\to0}u(x,t)=f(x),\ 在\ H^{p_0}+H^1\ 中$$

记 $\Omega_k=\{x:f_m^*(x)>2^k\}$，不难看出 $u(x,t)\mathscr{X}_{\Omega_k^c}(x)$ 当 $t\to0$ 时为有界收敛。因此，如以 $\lim\limits_{t\to0}u(x,t)\mathscr{X}_{\Omega_k^c}(x)$ 代替命题3.3证明中的 $f(x)\mathscr{X}_{\Omega_k^c}(x)$，并依命题3.3的证法，同样可得

$$f=\sum_k(g^k-g^{k+1})=\sum_k\left(\sum_i h_i^k\right)\triangleq\sum_k f_k,$$

其中 g^k 和 h_i^k 的定义见命题3.3的证明。由 h_i^k 的构造不难看出 h_i^k 满足(ii)的要求。为证(i)，只需证明

$$\lim_{N_1\to-\infty}\left\|\sum_{k=-\infty}^{N_1}f_k\right\|_{H^1}=0,\tag{6.1}$$

以及

$$\lim_{N_2\to\infty}\left\|\sum_{k=N_2}^{\infty}f_k\right\|_{H^{p_0}}=0.\tag{6.2}$$

以上两式的证明相仿，下面只给出(6.1)式的证明。事实上，由(ii)可知

$$\left\|\sum_{k=-\infty}^{N_1}f_k\right\|_{H^1}\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{N_1}\sum_i 2^k|B(x_i^k,18r_i^k)|$$

$$\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{N_1}2^k|\Omega_k|\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{N_1}2^{k(1-p)}\|f\|_{H(p,\infty)}^p.$$

因此，(6.1)式成立。

为证逆命题，设 $f\in\mathscr{S}'$，且满足(i)和(ii)。由(ii)可知

$$\|f_k\|_\infty\leqslant C2^k.$$

由此推出

$$\|\varphi_+^*(f_k)\|_\infty \leqslant 2^k C.$$

对任一$\alpha>0$，取k_0满足$2^{k_0}\leqslant\alpha<2^{k_0+1}$，并写着

$$f=\sum_{k=-\infty}^{k_0-1} f_k+\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k \triangleq F_1+F_2,$$

则

$$\varphi_+^*(F_1)(x)\leqslant\sum_{k=-\infty}^{k_0-1}\varphi_+^*(f_k)(x)\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{k_0-1}2^k\leqslant C_0\alpha.$$

由此推出

$$|\{x:\varphi_+^*(f)(x)>(C_0+1)\alpha\}|\leqslant|\{x:\varphi_+^*(F_2)(x)>\alpha\}|.$$

因此，为证逆命题，只需证明，存在一与α无关的常数C，使得

$$|\{x:\varphi_+^*(F_2)(x)>\alpha\}|\leqslant C\alpha^{-p}.$$

如记$A_{k_0}=\bigcup_{k=k_0}^{\infty}\bigcup_i \widetilde{B}_i^k$，则

$$|A_{k_0}|\leqslant\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_i|\widetilde{B}_i^k|\leqslant CC_1\sum_{k=k_0}^{\infty}2^{-kp}\leqslant CC_1\alpha^{-p}.$$

因此，余下只需证明

$$|\{x\notin A_{k_0}:\varphi_+^*(F_2)(x)>\alpha\}|\leqslant C\alpha^{-p}.$$

设$x\notin A_{k_0}$，由(ii)中的3)可得

$$(h_i^k*\varphi_t)(x)=\int h_i^k(y)t^{-n}\left\{\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)-P\left(\frac{x_i^k-y}{t}\right)\right\}dy,$$

其中x_i^k为B_i^k的中心，P为φ在点$(x-x_i^k)/t$处的s次Taylor多项式。由上式不难得到

$$|(h_i^k*\varphi_t)(x)|\leqslant C2^k|B_i^k|^{(n+s+1)/n}|x-x_i^k|^{-(n+s+1)}.$$

由此推出

$$\varphi_+^*(h_i^k)(x)\leqslant C2^k|B_i^k|^{(n+s+1)/n}|x-x_i^k|^{-(n+s+1)},\ \text{当}\ x\notin A_{k_0}.$$

如记$g_{k,i}(x)=|x-x_i^k|^{-(n+s+1)}$，$C_{k,i}=C2^k|B_i^k|^{(n+s+1)/n}$，以及$q=\dfrac{n}{n+s+1}$，则

$$\begin{aligned}&|\{x\notin A_{k_0}:\varphi_+^*(F_2)(x)>\alpha\}|\\ \leqslant&\left|\left\{x\notin A_{k_0}:\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_i\varphi_+^*(h_i^k)(x)>\alpha\right\}\right|\\ \leqslant&\left|\left\{x:\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_i C_{k,i}g_{k,i}(x)>\alpha\right\}\right|.\end{aligned}$$

注意到

$$|\{x: g_{k,i}(x)>\alpha\}|\leqslant C\alpha^{-q},$$

如使用如下的关于弱型估计的叠加原理：不等式

$$|\{x: g_m(x)>\alpha\}|\leqslant C\alpha^{-q},\ \forall m\in N,$$

蕴含着

$$|\{x: |\sum_m C_m g_m(x)|>\alpha\}|\leqslant C\frac{2-q}{1-q}\alpha^{-q}\sum_m |C_m|^q$$

其中 $0<q<1$ (其证明见 E. M. Stein, M. H. Taibleson, G. Weiss [STW 1] 或本书第3章引理5.1)，则

$$|\{x\notin A_{k_0}: \varphi_+^*(F_2)(x)>\alpha\}|\leqslant C\alpha^{-q}\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_i |C_{k,i}|^q$$

$$\leqslant C\alpha^{-q}\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_i 2^{kq}|B_i^k|\leqslant CC_1\alpha^{-q}\sum_{k=k_0}^{\infty}2^{k(q-p)}\leqslant CC_1\alpha^{-p}.$$

到此，定理证毕。

§7 分子与分子分解结构

H^p 空间原子分解结构理论的基本思想，就是将 H^p 中的元素分解成一列基本元素依一定形式的叠加，而这些基本元素应当具有某些非常简单的实变性质。例如，原子应当满足定义1.1中的三个条件。但是，原子必须具有紧支集的要求，使得某些相当光滑的函数不能成为原子。因此，自然产生了如下的问题：可否选择不具有紧支集的函数作为 H^p 空间分解结构中的基本元素呢？本节要引进的分子就是对原子所满足的条件作适当的修正，特别是去掉了具有紧支集这一要求，产生了另一类区别于原子的基本元素。

定义 7.1 设 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，非负整数

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],\ \varepsilon>\max\left\{s/n,\ \frac{1}{p}-1\right\},\ a_0=1-\frac{1}{p}+\varepsilon,$$

以及 $b_0=1-\dfrac{1}{q}+\varepsilon$。一函数 $M\in L^q(\mathbb{R}^n)$ 称为中心在 x_0 处的 (p, q, s, ε) 分子，是指它满足以下三个条件：

(i) $|x|^{nb_0}M(x)\in L^q(R^n)$;

(ii) $\mathcal{N}_q(M)\triangleq\|M\|_q^{a_0/b_0}\|M(\cdot)|\cdot-x_0|^{nb_0}\|_q^{1-(a_0/b_0)}<\infty$;

(iii) $\int_{R^n}M(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0,\ |\alpha|\leqslant s$.

为使(iii)中等式的左端有意义，需要指出 $M(x)x^\alpha\in L^1(R^n)$。事实上，

$$\int_{R^n}|M(x)x^\alpha|\mathrm{d}x=\int_{|x|<1}|M(x)x^\alpha|\mathrm{d}x+\int_{|x|\geqslant 1}|M(x)x^\alpha|\mathrm{d}x.$$

由 Hölder 不等式易知

$$\int_{|x|<1}|M(x)x^\alpha|\mathrm{d}x<\infty.$$

其次，如记 $\delta=n\varepsilon-s$，则 $\delta>0$。因此，由(i)可得

$$\int_{|x|\geqslant 1}|M(x)x^\alpha|\mathrm{d}x\leqslant\|M(\cdot)|\cdot|^{nb_0}\|_q\left\{\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-(n/q'+\delta)q'}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}$$

$$<\infty.$$

这就证实了前面的断言。

下面的命题表明：分子是原子概念的拓广。

命题 7.1 设 p、q 及 s 如定义 7.1 中所述。若 $a(x)$ 为一 (p, q, s) 原子，则对任一 $\varepsilon>0$，$a(x)$ 也是 (p, q, s, ε) 分子，且

$$\mathcal{N}_q(a)\leqslant C,$$

其中常数 C 与 a 无关。

证明 设 $\operatorname{supp}a\subset B(x_0, r)$。如注意到

$$a_0-b_0=\frac{1}{q}-\frac{1}{p},$$

则

$$\|a\|_q\leqslant|B|^{a_0-b_0},\ B=B(x_0, r),$$

以及

$$\|a(\cdot)|\cdot-x_0|^{nb_0}\|_q\leqslant C|B|^{b_0}\|a\|_q\leqslant C|B|^{a_0}.$$

由此可推出命题的结论，证毕。

本节的主要目的在于指出分子不仅是原子概念的拓广，而且也可以取代原子作为 H^p 空间分解结构中的基本元素，也即 H^p 空间中的元素可以表成一列分子依某种形式的叠加。

定理 7.1 设 p、q、s 及 ε 如定义 7.1 中所述，则

$$f\in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$$

当且仅当 f 可表示为

$$f(x)=\sum_k \lambda_k M_k(x),$$

其中等式在 $\mathscr{S}'$ 中成立，每一 M_k 为(p, q, s, ε)分子，$\sum|\lambda_k|^p<\infty$，以及存在一与 k 无关的常数 C，使得 $\mathscr{N}_q(M_k)\leqslant C$。此外，

$$\inf\{(\sum_k|\lambda_k|^p)^{1/p}: f=\sum_k\lambda_k M_k\}\sim\|f\|_{H^p}.$$

由于每一(p, q, s)原子也是(p, q, s, ε)分子，故定理的必要性证明是显然的，而充分性的证明可由下面定理直接推得。

定理 7.2 若 M 为一(p, q, s, ε)分子，其中 p, q, s 及 ε 如定义 7.1 中所述，则 $M\in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|M\|_{H_a^{p,q,s}}\leqslant C\mathscr{N}_q(M),$$

其中常数 C 与 M 无关。

证明 先设 $q=2$，并不妨认为 $x_0=0$。记

$$\sigma=\|M\|_2^{\{n(1/p-1/2)\}^{-1}},\ E_0=\{x: |x|\leqslant\sigma\},$$

$$E_k=\{x: 2^{k-1}\sigma<|x|\leqslant 2^k\sigma\},\ k\in\mathbb{N},$$

以及 $B_k=\{x: |x|\leqslant 2^k\sigma\}$，$k=0, 1, \cdots$。如记 $\mathscr{X}_k(x)=\mathscr{X}_{E_k}(x)$，以及 $M_k(x)=M(x)\mathscr{X}_k(x)$，则

$$M(x)=\sum_k M_k(x).$$

此外，依 §4 中的记号，$(P_{E_k}M_k)(x)$ 是使等式

$$\int_{E_k}\{M_k(x)-Q_k(x)\}x^\alpha dx=0,\quad|\alpha|\leqslant s$$

成立的唯一的 $Q_k\in\mathscr{P}_s$。因此，如记 $P_k(x)=(P_{E_k}M_k)(x)\mathscr{X}_k(x)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\{M_k(x)-P_k(x)\}x^\alpha dx=0,\quad|\alpha|\leqslant s.$$

以下将证明：每一(M_k-P_k)均是$(p, 2, s)$原子的倍数，且 $\sum_k P_k$ 具有依(p, ∞, s)原子的分解，这一事实结合等式

$$M(x)=\sum_k(M_k-P_k)+\sum_k P_k$$

将不难导致定理的结论。为简便起见，不妨设 $\mathcal{N}_2(M)=1$，因此，

$$\| M(\cdot)|\cdot|^{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\|_2^{1-a_0/b_0}=\|M\|_2^{-a_0/b_0}.$$

上式可改写成

$$\| M(\cdot)|\cdot|^{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\|_2=\sigma^{na_0}.$$

设 $\{\varphi_l^k: |l|\leqslant s\}$ 是由 $\{x^\alpha: |\alpha|\leqslant s\}$ 经 Gram-Schmidt 方法得到的关于权 $1/|E_k|$ 为正交的多项式（限制于 E_k 上），此即 $\varphi_l^k\in\mathscr{P}_s$，$|l|\leqslant s$，且满足

$$\langle\varphi_\nu^k, \varphi_\mu^k\rangle\triangleq\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\varphi_\nu^k(x)\varphi_\mu^k(x)\mathrm{d}x=\delta_{\nu\mu}.$$

不难验证

$$P_k(x)=\sum_{|l|\leqslant s}\langle M_k, \varphi_l^k\rangle\varphi_l^k(x),\ x\in E_k. \tag{7.1}$$

现在，由引理 4.1 得

$$\frac{1}{|B_k|}\int|M_k(x)-P_k(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{|E_k|}\int|M_k(x)|^2\mathrm{d}x,$$

由此推出：当 $k=0$ 时，有

$$\frac{1}{|B_0|}\int|M_0(x)-P_0(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\sigma^{-n}\|M\|_2^2=C|B_0|^{-2/p},$$

以及当 $k\in\boldsymbol{N}$ 时，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B_k|}\int|M_k(x)-P_k(x)|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{C}{|E_k|}\int_{E_k}|M(x)|^2|x|^{n(1+2\varepsilon)}|x|^{-n(1+2\varepsilon)}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\|M(\cdot)|\cdot|^{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\|_2^2(2^k\sigma)^{-n}(2^{k-1}\sigma)^{-n(1+2\varepsilon)}\\&=C|B_k|^{-2/p}2^{-2na_0k}.\end{aligned}$$

因此，

$$\|M_k-P_k\|_2\leqslant2^{-ka_0n}C|B_k|^{1/2-1/p},\ k=0, 1, \cdots.$$

如记 $a_k(x)=\lambda_k^{-1}\{M_k(x)-P_k(x)\}$，其中 $\lambda_k=C2^{-ka_0n}$，则每一 $a_k(x)$ 均为 $(p, 2, s)$ 原子。其次，注意到

$$\sum_{k=0}^\infty|\lambda_k|^p=C^p\sum_{k=0}^\infty2^{-pka_0n}<\infty,$$

则等式

$$\sum_k\{M_k(x)-P_k(x)\}=\sum_k\lambda_k a_k(x)$$

已表示左端的量在点态意义下依$(p, 2, s)$原子的分解式。

下面，转向$\sum\limits_k P_k$的原子分解式。记$\{\psi_l^k: |l|\leqslant s\}$为$\{x^\alpha: |\alpha|\leqslant s\}$关于权$1/|E_k|$的对偶基（限制于$E_k$上），此即$\psi_l^k\in\mathscr{P}_s$，且满足

$$\langle\psi_l^k, x^\alpha\rangle\triangleq\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}x^\alpha\psi_l^k(x)\mathrm{d}x=\delta_{\alpha l}.$$

由对偶基的定义不难证明，若$\varphi_l^k(x)=\sum\limits_{|\nu|\leqslant s}\beta_{l\nu}^k x^\nu$，则

$$\psi_l^k(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s}\beta_{\nu l}^k\varphi_\nu^k(x).$$

由此以及(7.1)式可推出

$$P_k(x)=\sum_{|l|\leqslant s}\langle M_k, x^l\rangle\psi_l^k(x), \ x\in E_k.$$

为给出$\sum\limits_k P_k$的原子分解式，还需要ψ_l^k的一个估计：存在一个同l、k及σ无关的常数C，使得

$$|\psi_l^k(x)|\leqslant C(2^{k-1}\sigma)^{-|l|}. \tag{7.2}$$

为此，记$E=\{x: 1\leqslant|x|\leqslant2\}$，$F=\{x: |x|\leqslant1\}$，以及$\{e_l: |l|\leqslant s\}$和$\{e_l^0: |l|\leqslant s\}$是$\{x^\alpha: |\alpha|\leqslant s\}$分别关于权$1/|E|$和$1/|F|$的对偶基（分别限制于$E$和$F$上），由等式

$$\begin{aligned}\delta_{l\alpha}&=\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\psi_l^k(x)x^\alpha\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{|E|}\int_E(2^{k-1}\sigma)^{|\alpha|}\psi_l^k(2^{k-1}\sigma y)y^\alpha\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

可知

$$e_l(y)=(2^{k-1}\sigma)^{|l|}\psi_l^k(2^{k-1}\sigma y), \ k=1, 2, \cdots.$$

同理可得

$$e_l^0(y)=(2^{k-1}\sigma)^{|l|}\psi_l^0(\sigma y).$$

由此推出

$$\psi_l^k(x)=(2^{k-1}\sigma)^{-|l|}e_l(x/2^{k-1}\sigma), \ x\in E_k(k=1, \alpha, \cdots),$$

以及

$$\psi_l^0(x)=(2^{k-1}\sigma)^{-|l|}e_l^0(x/\sigma),\ x\in F.$$

如取

$$C=\sup_l\{\|e_l\|_\infty,\ \|e_l^0\|_\infty\},$$

则由以上两式便知(7.2)式成立。

现在，如置

$$N_l^k=\sum_{j=k}^{\infty}|E_j|\langle M_j,\ x^l\rangle,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

则

$$N_l^0=\sum_{j=0}^{\infty}|E_j|\langle M_j,\ x^l\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{E_j}M(x)x^l\,dx=0,$$

以及当 $k\in N$ 时，有

$$\begin{aligned}|N_l^k|&\leqslant\sum_{j=k}^{\infty}\int_{E_j}|M_j(x)x^l|dx\leqslant\sum_{j=k}^{\infty}\|M_j\|_2(2^j\sigma)^{|l|+(n/2)}\\&\leqslant\sum_{j=k}^{\infty}\|M(\cdot)|\cdot|^{n(1/2+\varepsilon)}\|_2(2^{j-1}\sigma)^{-n(1+2\varepsilon)/2}(2^j\sigma)^{|l|+(n/2)}\\&\leqslant C\sigma^{|l|-n(1/p-1)}2^{k(|l|-n\varepsilon)}.\end{aligned}$$

由上式和(7.2)式可得

$$|E_k|^{-1}|N_l^k\psi_l^k(x)\mathscr{X}_k(x)|\leqslant C\sigma^{-n/p}2^{-k(1+\varepsilon)n}\to0,\ 当\ k\to\infty. \tag{7.3}$$

因此，如对等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|\leqslant s}\langle M_k,\ x^l\rangle\psi_l^k(x)\mathscr{X}_k(x)$$

的右端使用 Abel 变换和(7.3)式，便得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)=&\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\langle M_j,\ x^l\rangle|E_j|\Big)\\&\cdot\{|E_k|^{-1}\psi_l^k(x)\mathscr{X}_k(x)-|E_{k+1}|^{-1}\psi_l^{k+1}(x)\mathscr{X}_{k+1}(x)\}\\=&\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=0}^{\infty}N_l^{k+1}\{|E_k|^{-1}\psi_l^k(x)\mathscr{X}_k(x)\\&-|E_{k+1}|^{-1}\psi_l^{k+1}(x)\mathscr{X}_{k+1}(x)\},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&|N_l^{k+1}\{|E_k|^{-1}\psi_l^k(x)\mathscr{X}_k(x)-|E_{k+1}|^{-1}\psi_l^{k+1}(x)\mathscr{X}_{k+1}(x)\}|\\&\leqslant C2^{-na_0(k+1)}|B_{k+1}|^{-1/p}.\end{aligned}$$

因此，如记

$$\mu_{lk}=C2^{-na_0(k+1)},$$

以及

$$a_{lk}(x)=C^{-1}2^{na_0(k+1)}N_l^{k+1}\{|E_k|^{-1}\psi_l^k(x)\mathscr{X}_k(x)$$
$$-|E_{k+1}|^{-1}\psi_l^{k+1}(x)\mathscr{X}_{k+1}(x)\},$$

则每一 $a_{lk}(x)$ 为 (p,∞,s) 原子，

$$\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_{lk}|^p<\infty,$$

以及

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)=\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{lk}a_{lk}(x).$$

因此，等式

$$M(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{lk}a_{lk}(x) \tag{7.4}$$

在点态意义下成立，其中每一 a_k 为$(p,2,s)$原子，每一 a_{lk} 为(p,∞,s) 原子，且

$$\sum_k\{|\lambda_k|^p+\sum_{|l|\leqslant s}|\mu_{lk}|^p\}<\infty.$$

为证 $M\in H_a^{p,2,s}$，只需验证，对任一 $g\in\mathscr{L}_{1/p-1,2,s}$，有

$$\int M(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\int\{\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}a_{lk}(x)\}g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.5}$$

事实上，(7.5)式蕴含着(7.4)式在 $\mathscr{S}'$ 中成立。

设 $g\in\mathscr{L}_{1/p-1,2,s}$，由命题4.1可知，存在 $P\in\mathscr{P}_s$，使得

$$\{g(x)-P(x)\}/(1+|x|)^{\varepsilon n+(n/2)}\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

由此推出

$$g(x)(1+|x|)^{-nl_0}\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

上式结合分子的条件(i)表明(7.5)式的左端有意义，而由命题7.1同样可知(7.5)式的右端也有意义。现在，如注意到

$$\operatorname{supp}a_k\subset E_k,$$

以及

$$\operatorname{supp}a_{lk}\subset E_k,$$

则(7.4)式便成为

$$M(x)=\sum_{k=0}^{m}\{\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}a_{lk}(x)\},\ \text{当}\ |x|\leqslant 2^m\sigma.$$

由此推出

$$\int_{|x|\leqslant 2^m\sigma}M(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m}\int\{\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}a_{lk}(x)\}g(x)\mathrm{d}x.$$

当 $m\to\infty$ 时,由上式便得到(7.5)式。因此,定理的证明当 $q=2$ 时已告完成。

当 $q\neq 2$ 时,其证明完全类似于 $q=2$ 的情形,需要改动之处只是对 σ 的假设应改为 $\sigma=\|M\|_q^{\{n(1/p-1/q)\}^{-1}}$。

§8 对算子有界性理论的应用

为了说明分解结构理论在研究 H^p 空间上 Fourier 分析问题的作用,先来看一个简单的例子。考虑周期情形,设 $f\in H(T)=H_0^{1,\infty,0}(T)$,以及 f 的 Fourier 展开为

$$f(\theta)\sim\sum_k C_k(f)e^{ik\theta}.$$

涉及 Fourier 系数估计的 Hardy 不等式是

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|C_k(f)|}{k}<\infty. \tag{8.1}$$

下面将看到,如使用 H^1 的原子分解结构理论,则(8.1)式的证明就变得相当简单。显然,如使用定理1.1在周期情形的类比(见注3.1),则(8.1)式的证明被归结为如下不等式的成立:

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|C_k(a)|}{k}\leqslant C, \tag{8.2}$$

其中常数 C 同$(1,\infty,0)$原子 a 无关。

设 $\operatorname{supp}a\subset I=(-r,r)$,则

$$|C_k(a)|=\left|\int_I a(t)\{e^{-2\pi ikt}-1\}\mathrm{d}t\right|\leqslant 2\pi|k||I|.$$

显然,(8.2)式可由下式推得:

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|C_k(a)|}{k}=\Big(\sum_{0<|k|<|I|^{-1}}+\sum_{|k|\geqslant|I|^{-1}}\Big)\frac{|C_k(a)|}{k}$$

$$\leqslant 2\pi\sum_{0<|k|<|I|^{-1}}|I|+(\sum_k|C_k(a)|^2)^{1/2}(\sum_{|k|\geqslant|I|^{-1}}|k|^{-2})^{1/2}\leqslant C.$$

上面的例子表明，H^p空间中元素的某种性质容易被归结为p原子的某种相应性质，而对后者的研究由于p原子所具有的三条性质使问题变得相当简单。这种应用特别在研究算子的H^p有界性时尤为明显。以下，设T为线性算子。

命题 8.1　若对任一(p, q, s)原子a，有$Ta\in L^r(R^n)$，且

$$\|Ta\|_r\leqslant C,$$

其中常数C同a无关，(p, q, s)如定义1.1中所述，以及$1\geqslant r\geqslant p$，则T为(H^p, L^r)型的。

证明　设$f\in H^p(R^n)=H_a^{p,q,s}(R^n)$，即

$$f(x)\overset{s'}{=\!=}\sum_j\lambda_j a_j(x),$$

其中每一$a_j(x)$为(p, q, s)原子，且

$$\sum_j|\lambda_j|^p<\infty.$$

根据注3.4，不妨设$f\in H^p(R^n)\cap L^1(R^n)$。由此推出

$$\|Tf\|_r^r\leqslant\sum_j|\lambda_j|^r\|Ta_j\|_r^r\leqslant C\sum_j|\lambda_j|^r\leqslant C(\sum_j|\lambda_j|^p)^{r/p}.$$

上式蕴含着命题的结论，证毕。

作为命题8.1的一个应用，现在来完成定理5.1之(ii)的证明。事实上，由命题8.1，只需证明：存在一常数C，使得不等式

$$\|Ta\|_p\leqslant C$$

对一切的(p, ∞, s)原子a成立。

设$a(x)$为任一(p, ∞, s)原子，且$\operatorname{supp}a\subset B$。如记$b(x)=|B|^{1/p-1/p_1}a(x)$，则$b(x)$为一$(p_1, \infty, s)$原子。因此，

$$\|a\|_{H_a^{p_1,\infty,s}}\leqslant|B|^{1/p_1-1/p}.$$

为简单起见，将上式写成

$$\|a\|_{H^{p_1}}\leqslant|B|^{1/p_1-1/p}.$$

其次，由a的原子尺寸条件易知

$$\|a\|_{p_2}\leqslant|B|^{1/p_2-1/p}.$$

因此，要证的不等式由下式给出：

$$p^{-1}\|Ta\|_p^p=\int_0^\infty \alpha^{p-1}|\{y:|Ta(y)|>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C_1\int_0^{|B|^{-1/p}}\alpha^{p-1}(\|a\|_{H^{p_1}}/\alpha)^{p_1}\mathrm{d}\alpha$$

$$+C_2\int_{|B|^{-1/p}}^\infty \alpha^{p-1}(\|a\|_{p_2}/\alpha)^{p_2}\mathrm{d}\alpha\leqslant C.$$

关于算子在 H^p 空间上的有界性，最有兴趣的问题是算子 T 在什么条件下为 (H^p, H^p) 型的，依命题 8.1 的证明，不难得到：若存在一常数 C，使得不等式

$$\|P_\varphi^*(Ta)\|_p\leqslant C$$

对一切的 (p, q, s) 原子 a 成立，则 T 为(H^p, H^p)型的。

然而，还存在另一种判断算子 T 为(H^p, H^p)型的方法。事实上，依据原子分解和分子分解定理，这个判断问题容易被归结于一个 p 原子在 T 作用下的像应成为一 p 分子。

命题 8.2 设 $p_1\leqslant p_2\leqslant 1$，若对任一$(p_1, q_1, s_1)$ 原子 a，Ta 为一$(p_2, q_2, s_2, \varepsilon)$分子，且满足

$$\mathcal{N}_{q_2}(Ta)\leqslant C,$$

其中 C 与 a 无关，则 T 为 (H^{p_1}, H^{p_2}) 型的，其中 (p_1, q_1, s_1)如定义 1.1 中所述，而$(p_2, q_2, s_2, \varepsilon)$如定义 7.1 中所述。

证明 设 $f\in H^{p_1}(R^n)=H_a^{p_1,q_1,s_1}(R^n)$，即

$$f(x)\stackrel{S'}{=\!=}\sum_j\lambda_j a_j(x),$$

其中每一 a_j 为 (p_1, q_1, s_1) 原子，且 $\sum_j|\lambda_j|^{p_1}<\infty$.

如记 $M_j=Ta_j$，则

$$Tf(x)\stackrel{S'}{=\!=}\sum_j\lambda_j M_j(x),$$

其中每一 M_j 为$(p_2, q_2, s_2, \varepsilon)$分子，如注意到

$$\sum_j|\lambda_j|^{p_2}\leqslant(\sum_j|\lambda_j|^{p_1})^{p_2/p_1}<\infty,$$

以及

$$\mathcal{N}_{q_2}(M_j)\leqslant C\quad (C\text{ 与 }j\text{ 无关}),$$

则命题的结论由定理 7.1 直接推得。

评注与参考文献

§1 定理1.1最早见于 R. R. Coifman[Co 1]，这里的证明是属于 J. M. Wilson [Wi 1]的。

§2 定理2.1最早见于 C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1]，这里的证明是属于 R. R. Coifman, G. Weiss [CW 1]的。

§3 定理3.1及其证明是属于 R. H. Latter [La 1]，而引理3.8见于[FS 1]。应当指出：J. M. Wilson [Wi 2]已给出了定理3.1的简化证明。但本书对定理3.1的证明是采用[La 1]中的原始证法，这是为了后面定理6.1和定理6.2证明的需要。

§4 引理4.1见于 M. H. Taibleson, G. Weiss [TW 1]。定理4.1的证明是仿照 R. R. Coifman, G. Weiss [CW 1]中的一维证明。命题4.1是属于[TW 1]的。

§5 定理5.1是属于 R. Macias [M 1]的，也可参见[CW 1]。定理5.2见于 J—L. Journé [J 1]，而定理5.3是属于 E. Hernandez [He 1]。

§6 J. Bergh, J. Löfström [BL 1]是一本极好的关于空间插值的参考书。本节中，凡涉及 L^p 空间($p\geqslant 1$)的插值结果当作已知的，读者可参看[BL 1]。定理6.1是属于 C. Fefferman, N. M. Riviere, Y. Sagher [FRS 1]的。后来，定理6.1也被 J. Peetre [Pe 2]用原子分解方法给出新证明。定理6.2当 $p=1$ 时，是属于 R. Fefferman, F. Soria [FSo 1]的，而当 $0<p<1$ 时，是属于刘和平[Li 1]的。

§7 定理7.1及其证明是属于 M. H. Taibleson, G. Weiss [TW 1]的。

§8 Hardy 不等式(8.1)对非周期情形也成立，而且其证明同(8.1)式的相类似，可参见 J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia [GR 1]。

第 3 章

在 Fourier 分析中的应用

§1 Fourier 变换

很明显，当 $f\in H^p(\boldsymbol{R}^n)=H_a^{p,2,s}(\boldsymbol{R}^n)$ 时，$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$。因此，如设 $g\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，以及 $f=\sum_k\lambda_k a_k$ 为 f 的$(p,\ 2,\ s)$原子分解式，则

$$\langle f,\hat{g}\rangle\triangleq\lim_{N\to\infty}\langle\sum_{k=1}^N\lambda_k a_k,\ \hat{g}\rangle$$

存在，注意到 $a_k\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，以及

$$\langle\sum_{k=1}^N\lambda_k a_k,\hat{g}\rangle=\langle\sum_{k=1}^N\lambda_k\hat{a}_k,\ g\rangle,$$

则当定义 $\hat{f}=\sum_k\lambda_k\hat{a}_k$ 时，必有 $\hat{f}\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$。下面将进一步指出：级数$\sum_k|\lambda_k\hat{a}_k(x)|$为绝对收敛，并且上述定义的 $\hat{f}(x)$实际上是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数。

定理 1.1 若 $f\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\hat{f}\in C(\boldsymbol{R}^n)$，且

$$|\hat{f}(x)|\leqslant C\|f\|_{H^p}|x|^{n(\frac{1}{p}-1)},$$

其中 C 与 f、x 无关。

为证定理，需要对 p 原子的 Fourier 变换建立估计。

引理 1.1 若 a 为中心在原点的$(p,\ 2,\ s)$原子，非负整数

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

以及 $|\alpha|\leqslant s$，则有

$$\text{(i)}\quad|D^\alpha\hat{a}(x)|\leqslant\frac{C|x|^{s+1-|\alpha|}}{\|a\|_2^{\{(\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\}-1}},$$

其中 C 与 x、a 无关;

(ii) $\||D^\alpha \hat{a}|^2\|_{r'} \leqslant C\|a\|_2^{2-\{(\frac{2|\alpha|}{n}+\frac{1}{r})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\}}$,

其中 C 与 a 无关, $1\leqslant r\leqslant\infty$, 以及 $1/r+1/r'=1$.

证明 设 $\operatorname{supp} a\subset B$, 并将 $(p,2,s)$ 原子 a 的尺寸条件改写成

$$|B|\leqslant\|a\|_2^{-d},\ d=(1/p-1/2)^{-1}. \tag{1.1}$$

如写着

$$\begin{aligned}D^\alpha \hat{a}(x)&=[a(t)(-2\pi it)^\alpha]^\wedge(x)\\&=\int_B a(t)(-2\pi it)^\alpha e^{-2\pi it\cdot x}\mathrm{d}t\\&=\int_B a(t)(-2\pi it)^\alpha\{e^{-2\pi it\cdot x}-P(t\cdot x)\}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $P(\tau)$ 为 $e^{-2\pi i\tau}$ 在原点的 $s-|\alpha|$ 阶 Taylor 多项式, 则

$$\begin{aligned}|D^\alpha\hat{a}(x)|&\leqslant C|x|^{s+1-|\alpha|}\int_B|a(t)||t|^{s+1}\mathrm{d}t\\&\leqslant C|x|^{s+1-|\alpha|}\|a\|_2\left(\int_B|t|^{2(s+1)}\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&\leqslant C|x|^{s+1-|\alpha|}\|a\|_2^{1-d(\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

上式最后一步用到了(1.1)式, (i)证毕.

为证(ii), 同样设 $\operatorname{supp} a\subset B$. 考虑任一 $f\in L^2(B)$, 以及线性算子 $T: f\mapsto D^\alpha f$. 由 Plancherel 定理以及等式

$$D^\alpha f(x)=\int_B f(t)(-2\pi it)^\alpha e^{-2\pi it\cdot x}\mathrm{d}t$$

推得

$$\|D^\alpha f\|_2^2=C\int_B|f(t)t^\alpha|^2\mathrm{d}t\leqslant C|B|^{2|\alpha|/n}\|f\|_2^2.$$

此即

$$\|Tf\|_2\leqslant C|B|^{|\alpha|/n}\|f\|_2. \tag{1.2}$$

其次, 由 Schwartz 不等式推得

$$|D^\alpha f(x)|\leqslant C\int_B|f(t)t^\alpha|\mathrm{d}t\leqslant C|B|^{\frac{|\alpha|}{n}+\frac{1}{2}}\|f\|_2,$$

此即

$$\|Tf\|_\infty\leqslant C|B|^{\frac{|\alpha|}{n}+\frac{1}{2}}\|f\|_2. \tag{1.3}$$

据(1.2)式,(1.3)式,以及 Riesz-Thorin 算子插值定理,便得

$$\left\{\int |D^\alpha f(x)|^{q_t}\mathrm{d}x\right\}^{1/q_t}\leqslant C|B|^{\frac{|\alpha|}{n}+\frac{t}{2}}\|f\|_2,$$

其中 $1/q_t=(1-t)/2$,以及 $0<t<1$. 如取 $q_t=2r'$ 以及 $f=a$, 则便得到(ii)中的不等式,证毕.

下面两个推论是明显的.

推论 1.1 若 a 为中心在原点的$(p, 2, s)$原子,则

$$|\hat{a}(x)|\leqslant C|x|^{s+1}\|a\|_2^{1-d\left(\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2}\right)},$$

$$d=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

推论 1.2 若 a 为中心在原点的$(p, 2, s)$原子,则

$$|\hat{a}(x)|\leqslant C\|a\|_2^{1-(d/2)}.$$

由以上两个推论可导出 p 原子 Fourier 变换的估计.

引理 1.2 若 a 为任一$(p, 2, s)$原子,其中非负整数

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

则

$$|\hat{a}(x)|\leqslant C|x|^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)},$$

其中 C 与 x、a 无关.

证明 先设 a 的中心在原点, 当 $\|a\|_2^d<|x|^n$ 时, 由推论 1.2 得

$$|\hat{a}(x)|\leqslant C\|a\|_2^{1-(d/2)}\leqslant C|x|^{n(1/p-1)},$$

而当 $\|a\|_2^d\geqslant|x|^n$ 时,由推论 1.1 也得

$$|\hat{a}(x)|\leqslant C|x|^{s+1}\|a\|_2^{1-d((s+1)/n+1/2)}\leqslant C|x|^{n(1/p-1)}.$$

再设 a 的中心在 x_0 处,此时,据等式

$$\hat{a}(x)=\int a(t)e^{-2\pi it\cdot x}\mathrm{d}t=e^{-2\pi ix_0\cdot x}\int a(u+x_0)e^{-2\pi iu\cdot x}\mathrm{d}u,$$

并注意到 $a(u+x_0)$为中心在原点的$(p, 2, s)$原子,同样得到

$$|\hat{a}(x)|\leqslant C|x|^{n(1/p-1)}.$$

定理 1.1 的证明 设 $f=\sum_k \lambda_k a_k$ 为 f 依$(p, 2, s)$ 原子的分

解式。由引理1.2易知级数$\sum_k \lambda_k \tilde{a}_k(x)$ 为绝对收敛。其次，由引理1.2还得知级数$\sum_k \lambda_k \tilde{a}_k(x)$ 在任一紧集上为一致收敛。由此并注意到$\tilde{a}_k \in C$，便推出$f \in C$。定理的后一结论可使用引理1.2推出：

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant \sum_k |\lambda_k| |\tilde{a}_k(x)| \\
&\leqslant C|x|^{n(1/p-1)} \sum_k |\lambda_k| \\
&\leqslant C|x|^{n(1/p-1)} \left(\sum_k |\lambda_k|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

证毕。

§ 2 Fourier 乘子

有了 H^p 空间上 Fourier 变换的概念，便可以在 H^p 空间上定义乘子算子。设m为一可测函数。如果由等式

$$
(T_m f)^\wedge(x) = m(x)\hat{f}(x), \quad f \in H^p(\mathbb{R}^n)
$$

所确定的$T_m f \in H^p(\mathbb{R}^n)$，且满足

$$
\|T_m f\|_{H^p} \leqslant C\|f\|_{H^p},
$$

其中C与f无关，则称m为$H^p(\mathbb{R}^n)$上有界的 Fourier 乘子，同时称T_m为$H^p(\mathbb{R}^n)$上有界的 Fourier 乘子算子。$(T_m f)(x)$ 通常记为

$$
(T_m f)(x) = [m(\cdot)\hat{f}(\cdot)]^\vee(x).
$$

又记

$$
\|T_m\| = \inf\{C: \|T_m f\|_{H^p} \leqslant C\|f\|_{H^p}\}.
$$

定理 2.1 若T_m为$H^p(\mathbb{R}^n)$上有界的 Fourier 乘子算子，则m为一有界函数，且$m \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{o\})$。

证明 设$f \in H^p(\mathbb{R}^n) = H_a^{p,2,s}(\mathbb{R}^n)$，且

$$
f(x) = \sum_i \lambda_i a_i(x)
$$

为f依$(p, 2, s)$原子的分解式，如记

$$
f_t(x) = t^{-n/p} f(x/t), \quad t > 0,
$$

则 $f_t(x)=\sum_i \lambda_i (a_i)_t(x)$。不难验证每一$(a_i)_t$为$(p, 2, s)$原子。因此，$f_t(x)\in H_a^{p,2,s}(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f_t\|_{H^p}\sim\|f\|_{H^p}\sim\inf\left(\sum_i|\lambda_i|^p\right)^{1/p}.$$

由定理的条件可知 $T_m f_t\in H^p(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|T_m f_t\|_{H^p}\leqslant C\|f_t\|_{H^p},$$

其中C与t、f无关。由上式并使用定理1.1，便得

$$|(T_m f_t)^\wedge(x)|\leqslant C\|f_t\|_{H^p}|x|^{n(1/p-1)},$$

此即

$$|m(x)f_t(x)|\leqslant C\|f\|_{H^p}|x|^{n(1/p-1)}.$$

上式还可写成

$$|m(x)t^{n(1-1/p)}f(tx)|\leqslant C\|f\|_{H^p}|x|^{n(1/p-1)}.$$

如取 $t=|x|^{-1}$，则得

$$|m(x)f(x/|x|)|\leqslant C\|f\|_{H^p}.$$

再取一$f_0\in H^p(\mathbb{R}^n)$，满足 $f_0(x/|x|)=1$，便得到定理的前一结论，而定理的后一结论可由乘子的定义和定理1.1直接推出。

上述定理表明：m为有界函数是T_m成为有界的$H^p(\mathbb{R}^n)$上Fourier乘子算子的一个必要条件。下面来讨论使T_m成为$H^p(\mathbb{R}^n)$上有界Fourier乘子算子的充分条件。

定理 2.2 设$0<p\leqslant 1$，t为一非负整数，且满足$1/p-1/2<t/n$。若$m(x)$满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^{|\beta|}|D^\beta m(x)|\leqslant A,\quad |\beta|\leqslant t, \tag{2.1}$$

则T_m为$H^p(\mathbb{R}^n)$上有界的Fourier乘子算子，且$\|T_m\|\leqslant A$。

上述定理通常称为Mihlin乘子定理，而(2.1)式称为乘子的Mihlin条件。如使用第2章命题8.2，并注意到

$$t-1\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

则定理2.2的结论可由下面的命题直接推得。

命题 2.1 设$0<p\leqslant 1$，t为一非负整数，且$1/p-1/2<t/n$。若$m(x)$满足(2.1)式，以及$a(x)$为任一$(p, 2, t-1)$原子，则$T_m a$

$=(m\hat{a})^{\vee}$为一

$$\left(p,\ 2\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],\ \frac{t}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

分子，并满足

$$\mathcal{N}_2(T_m a)\leqslant C,$$

其中 C 与 a 无关。

证明 如同引理1.2的证明，不妨设 a 为一中心在原点的 $(p,\ 2,\ t-1)$ 原子。当 $|\nu|<t-\frac{n}{2}$ 时，不难验证 $x^{\nu}(T_m a)(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$。下面，先证 $T_m a$ 满足消失矩条件

$$\int (T_m a)(x)x^{\nu}dx=0,\ |\nu|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]. \tag{2.2}$$

事实上，当 $\nu=0$ 时，由(2.1)式以及 $\hat{a}(0)=0$ 便知(2.2)式成立，当

$$0<|\nu|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$$

时，如使用推论1.1，则得

$$\begin{aligned}D^{\nu}(m\hat{a})(0)&=\lim_{|h|\to 0}|h|^{-|\nu|}\Delta^{\nu}_{|h|}(m\hat{a})(0)\\&=\lim_{|h|\to 0}O(|h|^{t-|\nu|})=0,\end{aligned}$$

其中 $\Delta^{\nu}_{|h|}$ 为以 $|h|$ 为步长的 ν 阶差分。上式蕴含着(2.2)式。

其次，要验证 $T_m a$ 满足分子的尺寸条件

$$\mathcal{N}_2(T_m a)\leqslant C.$$

此即

$$\{\|T_m a\|_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n}}\cdot\|x^{\mu}(T_m a)(x)\|_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\}^{n/t}\leqslant C,\ |\mu|=t.$$

由 Plancherel 定理，上式可写成

$$\{\|m\hat{a}\|_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n}}\cdot\|D^{\mu}(m\hat{a})\|_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\}^{n/t}\leqslant C,\ |\mu|=t.$$

不难看出，为证上式，由(2.1)式而只需证明

$$\|(D^{\alpha}\hat{a})(D^{\beta}m)\|_2\leqslant C\|a\|_2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n}\right)/\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)},\ |\alpha|+|\beta|=t. \tag{2.3}$$

以下分两种情形来证明(2.3)式。首先，当 $\beta=0$ 时(从而 $|\alpha|$

$=t$)，由(2.1)式并使用引理1.1可得

$$\|(D^\alpha\hat{a})m\|_2\leqslant A\|D^\alpha\hat{a}\|_2$$

$$\leqslant CA\|a\|_2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n})/(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}.$$

因此，(2.3)式成立。其次，当 $0<|\beta|\leqslant t$ 时(从而 $0\leqslant|\alpha|<t$)，由引理1.1便有

$$\|(D^\alpha\hat{a})(D^\beta m)\|_2^2=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\int_{2^l<|x|\leqslant 2^{l+1}}|D^\alpha\hat{a}(x)|^2|D^\beta m(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{L}2^{2l(t-|\alpha|)}\|a\|_2^{2(t/n-1/p+1)/(1/p-1/2)}$$

$$\cdot\int_{2^l<|x|\leqslant 2^{l+1}}|D^\beta m(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$+C\sum_{l=L}^{\infty}\left(\int_{2^l<|x|\leqslant 2^{l+1}}|D^\beta m(x)|^{2r}\mathrm{d}x\right)^{1/r}\||D^\alpha\hat{a}|^2\|_{r'}$$

$$\triangleq I_1+I_2.$$

显然，由(2.1)式便得

$$I_1\leqslant CA^2\sum_{l=-\infty}^{L}2^{2l(t-|\alpha|)-2l|\beta|+ln}\|a\|_2^{2(t/n-1/p+1)/(1/p-1/2)}$$

$$\leqslant CA^2 2^{Ln}\|a\|_2^{2(t/n-1/p+1)/(1/p-1/2)}.$$

如选取 L，使得 $2^{Ln}\sim\|a\|_2^{1/(1/p-1/2)}$，则得

$$I_1\leqslant CA^2\|a\|_2^{2(1/2-1/p+t/n)/(1/2-1/p)}.$$

对于 I_2，如选取 r，使得 $(n/r)-2|\beta|<0$，并使用引理1.1，则得

$$I_2\leqslant CA^2\sum_{l=L}^{\infty}2^{l(n/r-2|\beta|)}\||D^\alpha\hat{a}|^2\|_{r'}$$

$$\leqslant CA^2 2^{Ln(1/r-2|\beta|/n)}\|a\|_2^{\{(2|\alpha|/n+1/r)/(1/p-1/2)\}-2}.$$

注意到 $2^{Ln}\sim\|a\|_2^{(1/p-1/2)^{-1}}$，由上式同样得到

$$I_2\leqslant CA^2\|a\|_2^{2(1/2-1/p+t/n)/(1/2-1/p)}.$$

因此，(2.3)式成立，定理证毕。

下面将指出：定理2.2的条件可以减弱，而减弱后的条件是更便于使用的。

定理 2.3 设 $0<p\leqslant 1$，t 为一非负整数，且 $1/p-1/2<t/n$。

若 $m(x)$ 满足

$$\sup_{0<R<\infty} R^{2|\beta|-n}\int_{R<|x|\leqslant 2R}|D^{\beta}m(x)|^{2}\mathrm{d}x\leqslant A^{2},\ |\beta|\leqslant t, \tag{2.4}$$

则 T_m 为 $H^p(R^n)$ 上有界的 Fourier 乘子算子，且 $\|T_m\|\leqslant A$。

上述定理通常称为 Hörmander 乘子定理，而(2.4)式称为乘子的 Hörmander 条件。不难看出，(2.1)式要强于(2.4)式。

为证定理，先建立一辅助引理。

引理 2.1 设非负整数 $t>n/2$。若 $m(x)$ 满足(2.4)式，则存在一与 $m(x)$ 无关的常数 C，使得

(i) 当 $r=1$ 或 $n/r>2(|\beta|-t)+n$ 时，有

$$\left(\int_{R<|x|\leqslant 2R}|D^{\beta}m(x)|^{2r}\mathrm{d}x\right)^{1/r}\leqslant CA^{2}R^{n/r-2|\beta|},0<R<\infty;$$

(ii) 当 $2(|\beta|-t)+n<0$ 时，有

$$|x|^{|\beta|}|D^{\beta}m(x)|\leqslant CA,$$

且 $D^{\beta}m$ 在 $R^n\setminus\{0\}$ 上连续。

证明 任取 $-\eta\in C_0^{\infty}(R^n)$，满足

$$\|\eta\|_{\infty}\leqslant 1,$$

$$\mathrm{supp}\,\eta\subset\{x:1/2<|x|<4\},$$

以及

$$\eta(x)=1,\ 当\ 1\leqslant|x|\leqslant 2.$$

如置

$$f(x)=R^{|\beta|}\eta(x/R)D^{\beta}m(x),$$

以及

$$g(x)=f(Rx)=R^{|\beta|}\eta(x)(D^{\beta}m)(Rx),$$

则当 $|\nu|\leqslant t-|\beta|$ 时，有

$$\begin{aligned}\|D^{\nu}g\|_2^2&=\int_{1/2<|x|<4}R^{2|\beta|}|D^{\nu}\{\eta(x)(D^{\beta}m)(Rx)\}|^{2}\mathrm{d}x\\&\leqslant CR^{2|\beta|}\int_{1/2<|x|<4}\sum_{|\alpha|=0}^{|\nu|}|(D^{\alpha+\beta}m)(Rx)|^{2}R^{2|\alpha|}\mathrm{d}x\\&\leqslant CR^{2(|\alpha|+|\beta|)-n}\int_{R/2<|x|<4R}\sum_{|\alpha|=0}^{|\nu|}|(D^{\alpha+\beta}m)(x)|^{2}dx\end{aligned}$$

$$=C\sum_{|\alpha|=0}^{|\beta|}R^{2|\alpha+\beta|-n}\int_{R/2<|x|<4R}|(D^{\alpha+\beta}m)(x)|^2dx.$$

注意到 $|\alpha+\beta|\leqslant t$，由(2.4)式可得

$$\|D^\nu g\|_2\leqslant CA，当 0\leqslant|\nu|\leqslant t-|\beta|.$$

记 $k=t-|\beta|$，则 $g\in L_k^2(\mathbb{R}^n)$，其中 $L_k^2(\mathbb{R}^n)$ 为 Sobolev 空间。由 Sobolev 空间的嵌入定理得

$$\|g\|_q\leqslant CA，当 k>n/2-n/q.$$

如记 $q=2r$，则

$$\|g\|_{2r}\leqslant CA，当 k>n/2-n/2r.$$

因此，当 $n/r>2(|\beta|-t)+n$ 时，有

$$\left(\int_{R<|x|<2R}|D^\beta m(x)|^{2r}dx\right)^{1/r}\leqslant R^{-2|\beta|}\|f\|_{2r}^2$$
$$=R^{(n/r)-2|\beta|}\|g\|_{2r}^2\leqslant CA^2R^{(n/r)-2|\beta|}.$$

引理证毕。

如使用第 2 章命题 8.2，并注意到

$$t-1\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

则定理 2.3 的结论可由下面的命题直接推出。

命题 2.2 设 p 和 t 如定理 2.3 中所述。若 $m(x)$ 满足(2.4)式，以及 $a(x)$ 为任一$(p,2,t-1)$原子，则 $T_m a=(m\hat{a})^\vee$ 为一

$$\left(p,2,\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

分子，且

$$\mathcal{N}_2(T_m a)\leqslant C,$$

其中 C 与 a 无关。

证明 如同命题 2.1 的证明，只需证明(2.3)式成立。当 $\beta=0$ 时，由引理 2.1(ii)和引理 1.1 得

$$\|(D^\alpha\hat{a})m\|_2\leqslant CA\|D^\alpha\hat{a}\|_2\leqslant CA\|a\|_2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n}\right)/\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

因此，(2.3)式成立。当 $0<|\beta|\leqslant t$ 时，有

$$\|(D^\alpha\hat{a})(D^\beta m)\|_2^2=I_1+I_2,$$

其中 $I_i(i=0,1)$ 为命题 2.1 证明中的表示式。

如以(2.4)式代替(2.1)式，并依命题 2.1 中的方法，同样得

$$I_1 \leqslant CA^2 \|a\|_2^{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n}\right)/\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

为估计 I_2，应注意到 I_2 表示式中的 r 是待定的。对 r 的选取，应分别考虑以下三种情形：

(i) 当 $|\beta|>n/2$ 时，取 $r=1$；

(ii) 当 $0<|\beta|\leqslant n/2$，且 $0<|\beta|<t-n/2$ 时，取 $r=\infty$；

(iii) 其它情形下，取一 r 满足 $1<r<\infty$，且

$$0<2|\beta|-\frac{n}{r}<2t-n.$$

不难看出，无论何种情形，指标 r 和 β 均满足引理 2.1 中的条件，以及

$$2|\beta|-\frac{n}{r}>0.$$

因此，由引理 2.1，并注意到

$$\frac{n}{r}-2|\beta|<0,$$

可得

$$I_2 \leqslant CA^2 \| |D^\alpha \hat{a}|^2 \|_r 2^{nL\left(\frac{1}{r}-\frac{2|\beta|}{n}\right)}.$$

最后，如注意到 $2^{Ln} \sim \|a\|_2^{1/\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$，并使用引理 1.1，便得

$$I_2 \leqslant CA^2 \|a\|_2^{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{t}{n}\right)/\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

因此，(2.3)式成立，命题证毕。

§3 Riesz 位势算子

对于 $1<p<\infty$，$L^p(R^n)$ 空间上的 Riesz 位势算子由等式

$$(I_\alpha f)(x) = C_{\alpha,n}\int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,\mathrm{d}y,\ 0<\alpha<n$$

来定义，其中 $C_{\alpha,n}$ 为一适当的常数。同样，它也可以用 Fourier 变换定义：

$$(I_\alpha f)^\wedge(x)=(2\pi|x|)^{-\alpha}\hat{f}(x), \tag{3.1}$$

其中 f 为充分光滑的函数。Sobolev 定理指出（参见 [St2]）：若 $1<p_1<p_2<\infty$，$0<\alpha<n/p_1$，以及 $1/p_2=1/p_1-\alpha/n$，则 I_α 为 (L^{p_1}, L^{p_2}) 型的，此即存在一常数 $C=C_{\alpha,p_1,p_2,n}$，使得

$$\|I_\alpha f\|_{p_2}\leqslant C\|f\|_{p_1}. \tag{3.2}$$

既然前面已经有了 $H^p(R^n)$ 上 Fourier 变换的概念，自然可以用(3.1)式来定义 $H^p(R^n)$上 Riesz 位势算子。对于这样定义的算子 I_α，在 $H^p(R^n)$ 上同样有拓广形式的 Sobolev 定理。

定理 3.1 (i) 若 $p_1\leqslant 1<p_2$，$0<\alpha<n$，以及 $1/p_2=1/p_1-\alpha/n$，则算子 I_α 为(H^{p_1}, L^{p_2})型的；

(ii) 若 $p_1<p_2\leqslant 1$，$0<\alpha<1$，以及 $1/p_2=1/p_1-\alpha/n$，则算子 I_α 为(H^{p_1}, H^{p_2})型的。

证明 (i) 由第 2 章命题 8.1，只需证明：不等式

$$\|I_\alpha a\|_{p_2}\leqslant C_{\alpha,n,p_1,p_2}$$

对一切的(p_1, q_1, s)原子 a 成立，其中 $q_1>p_1$，以及

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\right].$$

由第 2 章定理 3.1，可设 s 为满足

$$s+1>n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)$$

的奇数。同时，可取 q_1 和 q_2，使得 $1<q_1<q_2<\infty$，以及

$$1/q_1-1/q_2=1/p_1-1/p_2.$$

此外，如同引理 1.2 的证明，不妨设 a 为一中心在原点的(p_1, q_1, s)原子。设 $\operatorname{supp} a\subset B$，并记 $\widetilde{B}$ 为 B 的 2 倍同心扩张。显然，

$$\begin{aligned}\|I_\alpha a\|_{p_2}&\leqslant\left(\int_{\widetilde{B}}|I_\alpha a(x)|^{p_2}dx\right)^{1/p_2}+\left(\int_{\widetilde{B}^c}|I_\alpha a(x)|^{p_2}dx\right)^{1/p_2}\\&\triangleq J_1+J_2.\end{aligned}$$

由于 $q_2/p_2>1$，故使用 Hölder 不等式和(3.2)式，便得

$$J_1\leqslant\|I_\alpha a\|_{q_2}|B|^{1/p_2-1/q_2}\leqslant C\|a\|_{q_1}|B|^{1/p_1-1/q_1}\leqslant C.$$

注意到

$$J_2=C_{\alpha,n}\left(\int_{\widetilde{B}^c}\left|\int_B\frac{a(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\right|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2},$$

如对 $|x-y|^{-n+\alpha}$ 在点 x 处作 Taylor 展开，并使用原子的消失矩条件，则得

$$J_2\leqslant C_{\alpha,n}\left\{\int_{\widetilde{B}^c}\left(\int_B\frac{|a(y)|\,|y|^{s+1}}{|x|^{n-\alpha+s+1}}\mathrm{d}y\right)^{p_2}\mathrm{d}x\right\}^{1/p_2}.$$

由此推出

$$J_2\leqslant C\|a\|_{q_1}|B|^{\frac{s+1}{n}-\frac{1}{q_1}-1}\left(\int_{\widetilde{B}^c}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{(n-\alpha+s+1)p_2}}\right)^{1/p_2}\leqslant C.$$

(ii) 设 q_1、q_2 及 s 的选取同(i)中相同。由第2章命题 8.2，只需证明：当 a 为一(p_1,q_1,s)原子时，$I_\alpha a$ 为一

$$\left(p_2,\ q_2,\ \left[n\left(\frac{1}{p_2}-1\right)\right],\ \varepsilon\right)$$

分子，且

$$\mathcal{N}_{q_2}(I_\alpha a)\leqslant C_{\alpha,n,p_1,p},$$

其中

$$\varepsilon>\max\left\{s/n,\ \frac{1}{p_2}-1\right\},$$

以及

$$s/n<\varepsilon<(s+1-\alpha)/n.$$

如注意到

$$s+1>n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)>n\left(\frac{1}{p_2}-1\right),$$

则满足上述条件的 ε 是存在的。以下记

$$a_0=1-\frac{1}{p_2}+\varepsilon,$$

以及

$$b_0=1-\frac{1}{q_2}+\varepsilon.$$

如同(i)，不妨设 a 为中心在原点的 (p_1,q_1,s) 原子，以及 $\operatorname{supp}a\subset B$。首先证明 $I_\alpha a$ 成为分子的尺寸条件。依分别类似于(i)中对 J_1 和 J_2 的估计方法，可得

$$\left(\int_{\tilde{B}} |I_\alpha a(x)|x|^{nb_0}|^{q_0}dx\right)^{1/q_0} \leqslant C|B|^{b_0}\|a\|_{q_0}$$

以及

$$\left(\int_{\tilde{B}^c} |I_\alpha a(x)|x|^{nb_0}|^{q_0}dx\right)^{1/q_0} \leqslant C|B|^{b_0}\|a\|_{q_1}.$$

由此推出

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_{q_0}(I_\alpha a) &= \|I_\alpha a\|_{q_0}^{a_0/b_0}\|I_\alpha a(\cdot)|\cdot|^{nb_0}\|_{q_0}^{1-(a_0/b_0)} \\ &\leqslant C\|a\|_{q_1}^{a_0/b_0}(\|a\|_{q_1}|B|^{b_0})^{1-(a_0/b_0)} \leqslant C.\end{aligned}$$

因此，余下只需验证消失矩条件

$$\int I_\alpha a(x)x^\nu dx = 0,\quad |\nu| \leqslant s.$$

事实上，不等式

$$\begin{aligned}\int_{|x|>1} |I_\alpha a(x)x^\nu|dx &\leqslant \|I_\alpha a(\cdot)|\cdot|^{nb_0}\|_{q_0} \\ &\cdot\left(\int_{|x|>1} |x|^{(|\nu|-nb_0)q'_0}dx\right)^{1/q'_0} < \infty\end{aligned}$$

表明 $I_\alpha a(x)x^\nu \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，由此推出

$$(I_\alpha a(t)t^\nu)^\wedge(x) = D^\nu\{(I_\alpha a)^\wedge(x)\} \in C(\boldsymbol{R}^n).$$

因此，为证

$$(I_\alpha a(t)t^\nu)^\wedge(0) = \int I_\alpha a(t)t^\nu dt = 0,$$

而只需证明

$$\lim_{|x|\to 0} D^\nu\{(I_\alpha a)^\wedge(x)\} = 0. \tag{3.3}$$

考虑 ν_1 和 ν_2，满足 $|\nu_1| + |\nu_2| = |\nu|$，注意到

$$D^{\nu_1}(|x|^{-\alpha}) = O(|x|^{-\alpha-|\nu_1|}),$$

以及

$$\begin{aligned}D^{\nu_2}\hat{a}(x) &= \int a(\xi)(-2\pi i\xi)^{\nu_2}e^{-2\pi i\xi\cdot x}d\xi \\ &= \int a(\xi)(-2\pi i\xi)^{\nu_2}[e^{-2\pi i\xi\cdot x} - P(\xi)]d\xi,\end{aligned}$$

其中 $P \in \mathscr{P}_{s-|\nu_2|}$。如取 $P(\xi)$ 为 $e^{-2\pi i\xi\cdot x}$ 在原点的 $s-|\nu_2|$ 阶Taylor 多项式，则得

$$|D^{\nu_2}\hat{a}(x)|\leqslant C|x|^{s-|\nu_2|+1}.$$

由此推出

$$|D^{\nu_1}(|x|^{-\alpha})D^{\nu_2}\hat{a}(x)|\leqslant C|x|^{s-|\nu|-\alpha+1}.$$

上式蕴含着(3.3)式。到此,定理证毕。

§4 奇异积分算子

本节要研究的对象是主值奇异积分

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}f(y)K(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中核K满足

$$\int_{R_1<|x|<R_2}K(x)\mathrm{d}x=0,\quad 0<R_1<R_2<\infty.$$

上述奇异积分简记作 $Tf=\mathrm{p.v.}(f*K)$。

关于 T在 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$ 上有界性的研究, E. M. Stein [St2] 中已有详细的论述。由于那里使用的方法是算子插值,故T在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性便成为首要的问题。本节中, 当研究T在 $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0<p\leqslant 1$ 上的有界性时, 可以预计赋予K的光滑性比起只保证T在$L^2(\mathbb{R}^n)$上有界时K应满足的条件要强一些。因此, 下面在讨论T在H^p上的有界性时, 总是假定T在L^2上是有界的。

定理 4.1　设 $Tf=\mathrm{p.v.}(f*K)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上为一有界的算子,并且对某一 $\delta(0<\delta\leqslant 1)$, K 满足

$$|K(x-y)-K(x)|\leqslant C|y|^{\delta}/|x|^{n+\delta},\ 当|x|>2|y|. \tag{4.1}$$

若 $\frac{n}{n+\delta}<p\leqslant 1$, 则 T为$(H^p,\ H^p)$型的。

证明　由第2章命题8.2, 只需证明: 对任一$(p,\ 2,\ 0)$ 原子 a, Ta 为一$(p,\ 2,\ 0,\ \varepsilon)$分子, 且满足

$$\mathcal{N}_2(Ta)\leqslant C,$$

其中C与a无关,以及

$$\frac{1}{p}-1<\varepsilon<\frac{\delta}{n}.$$

注意到K满足

$$\text{p.v.}\int K(x)\mathrm{d}x=0,$$

不难看出

$$\int Ta(x)\mathrm{d}x=0.$$

因此，下面只需证明(4.2)式．记

$$a_0=1-\frac{1}{p}+\varepsilon,$$

以及

$$b_0=\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

设a为一$(p,\ 2,\ 0)$原子，且$\operatorname{supp}a\subset B(x_0,\ r)$．由于$T$在$L^2$上有界，故不难推出

$$\|Ta\|_2\leqslant C\|a\|_2\leqslant Cr^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_{|x-x_0|<2r}|Ta(x)|^2|x-x_0|^{2nb_0}\mathrm{d}x&\leqslant Cr^{n(1+2\varepsilon)}\|Ta\|_2^2\\&\leqslant Cr^{2n(1-1/p+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

其次，由原子的消失矩条件和(4.1)式可知：当$y\in B(x_0,\ r)$，以及$x\in R^n\backslash B(x_0,\ 2r)$时，必有

$$\begin{aligned}|Ta(x)|&=\left|\int\{K(x-y)-K(x-x_0)\}a(y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant C\int\frac{|y-x_0|^\delta}{|x-x_0|^{n+\delta}}|a(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant Cr^{\delta+n(1-1/p)}|x-x_0|^{-(n+\delta)}.\end{aligned}$$

由此推得

$$\begin{aligned}&\int_{|x-x_0|\geqslant 2r}|Ta(x)|^2|x-x_0|^{2nb_0}\mathrm{d}x\\&\leqslant Cr^{2\delta+2n(1-1/p)}\int_{|x-x_0|\geqslant 2r}|x-x_0|^{2nb_0-2(n+\delta)}\mathrm{d}x\\&\leqslant Cr^{2n(1-1/p+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\|Ta\|_2^{a_0/b_0}\||Ta(\cdot)|\cdot-x_0|^{nb_0}\|_2^{1-(a_0/b_0)}$$

$$\leqslant C\left(r^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\right)^{a_0/b_0}\cdot\left(r^{n\left(1-\frac{1}{p}+\varepsilon\right)}\right)^{1-(a_0/b_0)}\leqslant C.$$

上式表明(4.2)式成立，定理证毕。

从上面定理的证明可以看出：当 $p=\dfrac{n}{n+\delta}$ 时，满足不等式

$$\frac{1}{p}-1<\varepsilon<\frac{\delta}{n}$$

的 ε 是不存在的。此时，在不增加核 K 的光滑性条件下，T 在 H^p 上是否为有界算子便成为一值得研究的问题了。下面，将利用弱 H^p 空间来研究这一问题。

定理 4.2　在定理 4.1 的条件下，若

$$p=\frac{n}{n+\delta},\quad 0<\delta<1,$$

则 T 为$(H^p,\ H(p,\ \infty))$型的。

证明　事实上，只需证明：存在一常数 C，使不等式

$$\|Tf\|_{H(p,\infty)}\leqslant C\|f\|_{H^p}$$

对一切的 $f\in H^p\cap L^2$ 成立。上式即为

$$|\{x:\varphi_+^*(Tf)(x)>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H^p}^p/\alpha^p,$$

其中 $\varphi\in K_m$ (可取 $m=1$)。据原子分解定理和第 2 章 § 6 最后的弱型估计叠加原理，上式的证明归结于以下估计：若 a 为任一$(p,\ \infty,\ 0)$原子，则

$$|\{x:\varphi_+^*(Ta)(x)>\alpha\}|\leqslant C/\alpha^p,\tag{4.3}$$

其中 C 与 a，α 无关。

现在，不妨设 a 为中心在原点的$(p,\ \infty,\ 0)$原子，且 $\operatorname{supp} a\subset B(0,\ r)$。记 $B=B(0,\ r)$，以及 $\tilde{\tilde{B}}=B(0,\ 4r)$。注意到算子 $f\to\varphi_+^*(f)$是$(L^2,\ L^2)$型的，不难得到

$$\int_{\tilde{\tilde{B}}}|\varphi_+^*(Ta)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C\|\varphi_+^*(Ta)\|_2^p|B|^{1-(p/2)}$$

$$\leqslant C\|Ta\|_2^p|B|^{1-(p/2)}$$

$$\leqslant C\|a\|_2^p|B|^{1-(p/2)}\leqslant C.$$

因此，

$$|\{x\in\tilde{\tilde{B}}:\varphi_+^*(Ta)(x)>\alpha\}|\leqslant C/\alpha^p.$$

以下，设 $x\in(\tilde{\tilde{B}})^c$，注意到

$$\int Ta(w)\mathrm{d}w=0,$$

则

$$\begin{aligned}|(Ta)*\varphi_\varepsilon(x)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}Ta(w)\varepsilon^{-n}\left\{\varphi\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\}\mathrm{d}w\right|\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_B a(v)K(w-v)\mathrm{d}v\right|\varepsilon^{-n}\left|\varphi\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right)\right.\\&\qquad\left.-\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\mathrm{d}w=\left(\int_{|w|<2r}+\int_{2r\leqslant|w|<|x|/2}\right.\\&\qquad\left.+\int_{|w|\geqslant|x|/2}\right)\cdots\triangleq I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

对于 I_1，由 Schwartz 不等式和中值定理得

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\|Ta\|_2\left(\int_{|w|<2r}\varepsilon^{-2n}\left|\varphi\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2\mathrm{d}w\right)^{1/2}\\&\leqslant C\|a\|_2\left(\int_{|w|<2r}\varepsilon^{-2n}\sup_{|\beta|=1}\left|D^\beta\varphi\left(\frac{x-\theta w}{\varepsilon}\right)\right|^2\left|\frac{w}{\varepsilon}\right|^2\mathrm{d}w\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

注意到 $\varphi\in K_m(m=1)$，以及 $|x-\theta w|\geqslant|x|/2$，便有

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant C\|a\|_2\left(\int_{|w|<2r}|w|^2\mathrm{d}w\right)^{1/2}|x|^{-(n+1)}\\&\leqslant C|B|^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}|x|^{-(n+1)}\leqslant C|x|^{-n/p}.\end{aligned}$$

对于 I_2，由原子的消失矩条件和中值定理得

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{2r<|w|<|x|/2}\left|\int_B a(v)\{K(w-v)-K(w)\}\mathrm{d}v\right|\varepsilon^{-n}\\&\qquad\cdot\left|\varphi\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\mathrm{d}w\\&\leqslant\int_{2r<|w|<|x|/2}\left(\int_B|a(v)|\,|K(w-v)-K(w)|\mathrm{d}v\right).\end{aligned}$$

$$\varepsilon^{-n}\sup_{|\beta|=1}\left|D^{\beta}\varphi\left(\frac{x-\theta w}{\varepsilon}\right)\right|\left|\frac{w}{\varepsilon}\right|\mathrm{d}w.$$

注意到 $\varphi\in K_m(m=1)$ 及 $|x-\theta w|\geqslant|x|/2$，由(4.1)式推得

$$I_2\leqslant C\int_{2r<|w|<|x|/2}\left(\int_B|a(v)||v|^{\delta}\mathrm{d}v\right)\frac{|w|}{|x|^{n+1}}\frac{1}{|w|^{n+\delta}}\mathrm{d}w$$
$$\leqslant C|B|^{1-1/p+\delta/n}|x|^{-(n+\delta)}\leqslant C|x|^{-n/p}.$$

最后，由(4.1)式直接推得

$$I_3\leqslant\int_{|w|\geqslant|x|/2}\left(\int_B|a(v)||K(w-v)-K(w)|\mathrm{d}v\right)\varepsilon^{-n}$$
$$\cdot\left(\left|\varphi\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right)\right|+\left|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\right)\mathrm{d}w$$
$$\leqslant C\int_{|w|\geqslant|x|/2}|w|^{-(n+\delta)}\varepsilon^{-n}\left(\left|\varphi\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right)\right|\right.$$
$$\left.+\left|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\right)\mathrm{d}w$$
$$\leqslant C\left\{|x|^{-(n+\delta)}+\int_{|w|\geqslant|x|/2}|w|^{-(n+\delta)}\varepsilon^{-n}\left|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\mathrm{d}w\right\}$$
$$\leqslant C\left(|x|^{-(n+\delta)}+|x|^{-n}\int_{|w|\geqslant|x|/2}|w|^{-(n+\delta)}\mathrm{d}w\right)$$
$$\leqslant C|x|^{-(n+\delta)}=C|x|^{-n/p}.$$

从以上 $I_i(i=1,2,3)$ 的估计推出

$$\varphi_+^*(Ta)(x)\leqslant C|x|^{-n/p},\ 当\ x\in(\tilde{B})^C. \tag{4.4}$$

由(4.4)式可得

$$|\{x\in(\tilde{B})^C:\varphi_+^*(Ta)(x)>\alpha\}|\leqslant C/\alpha^p,$$

因此，(4.3)式成立，定理证毕。

从定理 4.2 可以看出，弱 H^p 空间可以用来研究奇异积分算子的尖锐性问题，这是弱 H^p 空间的一个用处。从第 2 章注 6.2 知道，Lorentz-Hardy 空间 $H(p,q)$ 是由在 H^p 和 $H(p,\infty)$ 之间进行插值所得到的中间空间。因此，奇异积分算子 T 在 $H(p,q)$ 上的有界性问题可以归结于 T 分别在 H^p 和 $H(p,\infty)$ 上的有界性，这是弱 H^p 空间的另一个用途。下面，将利用 $H(p,\infty)$ 的原子分解结构定理来研究奇异积分算子 T 在 $H(p,\infty)$ 上的有界性。

定理 4.3 在定理 4.1 的条件下，若

$$\frac{n}{n+\delta}<p\leqslant 1,$$

以及 $0<\delta\leqslant 1$，则 T 为 $(H(p,\infty),\ H(p,\infty))$ 型的。

证明 仅对 $\delta=1$ 的情形给出证明，当 $0<\delta<1$ 时的证法相类似。事实上，需要证明不等式

$$|\{x:\varphi_+^*(Tf)(x)>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^p/\alpha^p, \tag{4.5}$$

其中 C 与 f、α 无关，以及 $\varphi\in K_m$。设 $f\in H(p,\infty)$，等式

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k$$

是第 2 章定理 6.2 中的分解式。取一 k_0，满足 $2^{k_0}\leqslant\alpha<2^{k_0+1}$，并置

$$f=\sum_{k=-\infty}^{k_0}f_k+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}f_k\triangleq F_1+F_2.$$

依第 2 章定理 6.2 证明中的记号，

$$\begin{aligned}\|F_1\|_2&\leqslant\sum_{k=-\infty}^{k_0}\|f_k\|_2\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^k|\Omega_k|^{1/2}\\&\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k(1-p/2)}\|f\|_{H(p,\infty)}^{p/2}\\&\leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^{p/2}\alpha^{1-(p/2)}.\end{aligned}$$

因此，由 φ_+^* 在 L^2 上有界以及定理的条件得

$$\begin{aligned}|\{x:\varphi_+^*(TF_1)(x)>\alpha\}|&\leqslant\|\varphi_+^*(TF_1)\|_2^2/\alpha^2\\&\leqslant C\|TF_1\|_2^2/\alpha^2\leqslant C\|F_1\|_2^2/\alpha^2\leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^p/\alpha^p.\end{aligned}$$

为证 (4.5) 式，余下只需证明

$$|\{x:\varphi_+^*(TF_2)(x)>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^p/\alpha^p. \tag{4.6}$$

仍依第 2 章定理 6.2 的记号，

$$f_k=\sum_i h_i^k,$$

其中 h_i^k 满足下列条件：

(1) $\operatorname{supp}h_i^k\subset B_i^k=B(x_i^k,\ r_i^k)$，$\sum_i|B_i^k|\leqslant C_1 2^{-kp}$，且

$$\sum_i \mathscr{X}_{B_i^*}(x)\leqslant C;$$

(2) $\|h_i^k\|_\infty \leqslant C2^k$;

(3) $\int h_i^k(x)\mathrm{d}x = 0$.

其中(1)中常数 $C_1 \sim \|f\|_{H(p,\infty)}^p$. 如记

$$B_{k_0} = \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} \bigcup_i \tilde{B}_i^k,$$

其中

$$\tilde{B}_i^k = B(x_i^k, 4r_i^k),$$

则

$$|B_{k_0}| \leqslant C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_i |B_i^k| \leqslant C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-kp} \|f\|_{H(p,\infty)}^p \leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^p / \alpha^p.$$

因此, 为证(4.6)式, 只需证明

$$|\{x \in (B_{k_0})^C : \varphi_+^*(TF_2)(x) > \alpha\}| \leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^p / \alpha^p. \tag{4.7}$$

取一 $\varepsilon > 0$, 满足

$$\frac{n}{n+1-\varepsilon} < p.$$

如果不等式

$$\varphi_+^*(Th_i^k)(x) \leqslant C2^k |B_i^k|^{\frac{n+1-\varepsilon}{n}} / |x - x_i^k|^{n+1-\varepsilon}, \quad 当\ x \in (\tilde{B}_i^k)^C \tag{4.8}$$

成立, 则对

$$g_i^k(x) = |x - x_i^k|^{-(n+1-\varepsilon)}, \quad q = \frac{n}{n+1-\varepsilon},$$

以及

$$C_i^k = C2^k |B_i^k|^{\frac{n+1-\varepsilon}{n}},$$

使用第 2 章 §6 最后的弱型估计叠加原理, 便得

$$|\{x \in (B_{k_0})^C : \varphi_+^*(TF_2)(x) > \alpha\}| \leqslant C\alpha^{-q} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_i 2^{kq} |B_i^k| \leqslant C\alpha^{-q} \|f\|_{H(p,\infty)}^p \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(q-p)} \leqslant C\|f\|_{H(p,\infty)}^p / \alpha^p.$$

因此，(4.8)式蕴含着(4.7)式成立。最后，注意到 b_k^i 满足的条件(1)～(3) 类似于原子应满足的条件。因此，以完全类似于定理 4.2 证明中对(4.4)式的证法，便可得到(4.8) 式。到此，定理证毕。

下面，再来研究奇异积分算子的另一类尖锐性问题。设 T 为奇异积分算子，在核K满足适当的条件下，T 为弱(L^1, L^1)型的，即 T 满足

$$|\{x: |Tf(x)|>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_1/\alpha,\ \forall\alpha>0.$$

但由不等式

$$\varphi_+^*(f)(x)\leqslant CHL(f)(x)$$

容易推出

$$\|f\|_{H(1,\infty)}\leqslant C\|f\|_1.$$

因此，上述弱(L^1, L^1)型的不等式能否进一步被推进为

$$|\{x: |Tf(x)|>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H(1,\infty)}/\alpha,\ \forall\alpha>0,$$

便成为一个有意义的问题。下面的定理表明：当核K满足一定的光滑条件时，上述问题的答案是肯定的。

定理 4.4　设 $Tf=\mathrm{p.v.}\,(f*K)$ 在 $L^2(R^n)$ 上为一有界的算子。若K满足 Dini 条件

$$\int_0^1\frac{\Gamma(\delta)}{\delta}\,d\delta<\infty,$$

其中

$$\Gamma(\delta)=\sup_{h\neq0}\int_{|x|>2|h|/\delta}|K(x+h)-K(x)|\,dx,$$

则对 $f\in L^1(R^n)$，有

$$|\{x: |Tf(x)|>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H(1,\infty)}/\alpha,$$

其中C与 f、α 无关。

证明　设 $f\in L^1\subset H(1,\infty)$，据第二章定理 6.2,

$$f=\sum_{k=-\infty}^{k_0}f_k+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}f_k\triangleq F_1+F_2,$$

其中 k_0 满足 $2^{k_0}\leqslant\alpha<2^{k_0+1}$。以下，沿用定理 4.3 证明中的记号。首先，依定理 4.3 证明中的方法可得

$$|\{x:|(TF_1)(x)|>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H(1,\infty)}/\alpha,$$

以及

$$|B_{k_0}|\leqslant C\|f\|_{H(1,\infty)}/\alpha,$$

其中 B_{k_0} 的记号同那里稍有不同，这里

$$B_{k_0}=\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty}\bigcup_{i}B\left(x_i^k,\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-k_0)/n}r_i^k\right).$$

因此，为证定理的结论，只需证明

$$|\{x\in B_{k_0}^c:|(TF_2)(x)|>\alpha\}|\leqslant C\|f\|_{H(1,\infty)}/\alpha. \qquad (4.9)$$

记

$$\overline{B}_i^k=B\left(x_i^k,\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-k_0)/n}r_i^k\right),$$

由 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\int_{B_{k_0}^c}|(TF_2)(x)|\mathrm{d}x&\leqslant C\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^k\sum_i\int_{B_i^k}\mathrm{d}y\int_{(\overline{B}_i^k)^c}|K(x-y)\\&\quad-K(x-x_i^k)|\mathrm{d}x\\&=C\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^k\sum_i\int_{B_i^k}\mathrm{d}y\int_{(\overline{B}_i^k-x_i^k)^c}\\&\quad\cdot|K(z-(y-x_i^k))-K(z)|\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中

$$\overline{B}_i^k-x_i^k=B\left(0,\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-k_0)/n}r_i^k\right).$$

注意到

$$|z|>\left(\frac{3}{2}\right)^{(k-k_0)/n}|y-x_i^k|,\ \text{当}\ y\in B_i^k\ \text{及}\ z\in(\overline{B}_i^k-x_i^k)^c,$$

由上式可得

$$\begin{aligned}&\int_{B_{k_0}^c}|(TF_2)(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant C\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^k\sum_i|B_i^k|\,\Gamma\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{(k-k_0)/n}\right]\\&\leqslant C\|f\|_{H(1,\infty)}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\Gamma\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{(k-k_0)/n}\right]\\&\leqslant C\int_0^1\frac{\Gamma(\delta)}{\delta}\,d\delta\|f\|_{H(1,\infty)}.\end{aligned}$$

上式蕴含着(4.9)式，定理证毕。

上面所研究的奇异积分算子是属于卷积型的，它的非卷积型的推广形式是如下的主值积分：

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,\ y)f(y)\mathrm{d}y.$$

定义 4.1　设 T 为 $\mathscr{S}\to\mathscr{S}'$ 的有界线性算子。称 T 为一 δ-Calderón-Zygmund 算子，是指 T 能扩充为一 $L^2(R^n)$ 上的有界算子，并且存在一定义于 $\{(x,\ y)\in R^n\times R^n: x\neq y\}$ 上的连续函数 $K(x,y)$，它满足以下三个性质：

(1)　$|K(x,\ y)|\leqslant C/|x-y|^n$，$x\neq y$；

(2)　$|K(x,\ y)-K(x,\ z)|+|K(y,\ x)-K(z,\ x)|\leqslant C|y-z|^\delta/|x-z|^{n+\delta}$；

当 $|x-z|\geqslant 2|y-z|$，$0<\delta\leqslant 1$；

(3)　对 f、$g\in\mathscr{S}$，以及 $\operatorname{supp} f\cap\operatorname{supp} g=\varnothing$，有

$$(Tf,\ g)=\int K(x,\ y)f(y)g(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

显然，定理 4.1 中的 T 为一 δ－Calderón-Zygmund 算子。对于一般非卷积型主值积分算子 T，要使它成为一 δ-Calderón-Zygmund 算子，首要的问题乃是 T 是否在 $L^2(R^n)$ 上有界。后者的判定准则已被 David-Journé 所建立，产生了著名的 $T1$ 定理(参见 [DJ1])。一旦一非卷积型的主值奇异积分算子成为一 δ-Calderón-Zygmund 算子以后，它在 $H^p(R^n)$ 上的有界性问题是可以用完全类似于卷积情形下的方法去解决。当然，略微的差别是存在的。事实上，在定理 4.1 的证明中，用到了以下的事实：对任一 p 原子 a，有

$$\int Ta(x)\mathrm{d}x=0.$$

这一事实的证明用到了算子 T 的卷积性。因此，对于一般的 δ-Calderón-Zygmund 算子来说，上述事实不会自然成立，而需要补充的条件。如记 T^* 为 T 的共轭算子，并设

$$T^*1=0,$$

则由等式

$$\int Ta(x)\mathrm{d}x=(Ta,\ 1)=(a,\ T^*1)=0$$

看出：$T^*1=0$ 相当于

$$\int Ta(x)\mathrm{d}x=0.$$

由此可将定理 4.1 以完全类似的方法拓广到非卷积情形。

定理 4.5 若 T 为一δ-Calderón–Zygmund 算子，且 $T^*1=0$，则 T 能扩充为一$(H^p,\ H^p)$型的算子，其中 $0<\delta\leqslant 1$，

$$\frac{n}{n+\delta}<p\leqslant 1.$$

同样，定理 4.2～4.4 也可以拓广到非卷积情形中，其证明方法本质上是同卷积情形下一致的。

从上面所讨论的奇异积分算子或 Calderón–Zygmund 算子在 H^p 上的有界性结果看出，p 值要满足 $\frac{n}{n+1}<p\leqslant 1$(当 $\delta=1$)。对于其它 p 值，需要增加核K的光滑条件(对于 Calderón–Zygmund 算子来说，还要求Ta 具有适当的消失矩条件)。现在，以Calderón–Zygmund 算子($\delta=1$)为例，来陈述一个结果。

定理 4.6 设 T 为 Calderón–Zygmund 算子，p 值满足

$$\frac{n}{n+m}<p\leqslant\frac{m}{n+m-1}\ (m\in N),$$

且核K满足

$$|\partial_x^\alpha K(x,\ y)|+|\partial_y^\alpha K(x,\ y)|\leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|},\ |\alpha|\leqslant m.$$

若 $T^*(x^\alpha)=0$，$|\alpha|\leqslant m-1$，则 T 能扩充为一 $(H^p,\ H^p)$ 型的算子。

如果 T 为一在 $L^2(R^n)$上有界的奇异积分算子，那末上述定理中核K所满足的条件应变成

$$|D^\alpha K(x)|\leqslant C|x|^{-n-|\alpha|},\ |\alpha|\leqslant m, \tag{4.10}$$

而条件 $T^*(x^\alpha)=0$ 应去掉。

如果奇异积分算子 T不仅同位移可交换，而且也同伸缩变换

可交换，则T的核K可写成

$$K(x)=\Omega(x')/|x|^n,$$

其中 Ω 为 0 次齐次函数。特别地，如取

$$\Omega(x')=\Omega_j(x')=Cx_j/|x|,$$

其中C为一适当的常数，则对应的奇异积分算子就是 Riesz 变换 R_j。不难验证，Riesz 变换 R_j 的核满足(4.10)式。由此推得下面定理。

定理 4.7　Riesz 变换 R_j 为(H^p, H^p)型的，其中 $0<p\leqslant 1$。

以上所研究的对象是奇异积分，其核的奇异性具有一定的标准，它们通常称为 Calderón-Zygmund 奇异积分。在研究多重 Fourier 级数(积分) 的球形收敛时，研究的对象是以 $e^{i|x|^a}\psi(x)/|x|^b$ 为乘子函数的乘子算子，其中 $0<a<1$, $b>0$, 以及 ψ 在原点附近为零，而当$|x|$充分大时为 1。这类算子比起 Calderón-Zygmund 奇异积分，其核具有更强的奇异性，它们通常称为强奇异积分。

定义 4.2　设T为 $\mathscr{S}\to\mathscr{S}'$ 上的有界线性算子。称T为强奇异 Calderón-Zygmund 算子，是指T满足以下三个条件：

(1) T 能扩张为 $L^2\to L^2$ 上的有界算子；

(2) 存在一在$\{(x, y): x\neq y\}$上连续的函数 $K(x, y)$，满足

$$|K(x, y)-K(x, z)|+|K(y, x)-K(z, x)|$$

$$\leqslant\frac{C|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+(\delta/\alpha)}},$$

当 $2|y-z|^\alpha\leqslant|x-z|$，其中 $0<\delta\leqslant 1$, $0<\alpha<1$，并满足

$$(Tf, g)=\int K(x, y)f(y)g(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

当　$\operatorname{supp} f\cap\operatorname{supp} g=\varnothing$；

(3) 对某一β，$\frac{n}{2}(1-\alpha)\leqslant\beta<\frac{n}{2}$，$T$ 及其共轭算子 T^* 能扩充为 $L^q\to L^2$ 上的有界算子，其中

$$1/q=1/2+\beta/n.$$

以完全类似于定理 4.1 证明中的方法可得如下结论。

定理4.8 设T为一强奇异Calderón-Zygmund算子，且$T^*1=0$。如记

$$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{2}+\left\{\beta\left(\frac{\delta}{\alpha}+\frac{n}{2}\right)\Big/n\left(\frac{\delta}{\alpha}-\delta+\beta\right)\right\},$$

则T能扩充为(H^p, H^p)型的算子，其中$p_0\leqslant p\leqslant 1$。

§5 Bochner-Riesz平均

本节所研究的一类卷积算子在Fourier分析中占有重要的地位。这类卷积算子所对应的核为

$$\varphi(x)=[(1-|\xi|^2)_+^\delta]^\wedge(x),\ \delta>0,$$

其中$(1-|\xi|^2)_+^\delta$为$(1-|\xi|^2)^\delta$的正部。熟知，φ可表为(参见[LW 1])

$$\varphi(x)=\pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)|x|^{-\left(\frac{n}{2}+\delta\right)}J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|),$$

其中$J_\nu(t)$为第一类ν阶Bessel函数。

不难看出，φ作为具有紧支集函数的Fourier变换，必有$\varphi\in C^\infty$。其次，还可以证明，当

$$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2},$$

且$0<p<1$时，φ满足不等式

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{n/p}|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant C_{\alpha,p,n}. \tag{5.1}$$

为证(5.1)式，需要用到Bessel函数的若干估计(参见[Wa 1])：

(1) $J_m(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t^{-1/2}\cos\left(t-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(t^{-3/2})$，当$t\to\infty$；

(2) $J_m(t)\sim A_m t^m$，当$t\to 0_+$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{t^{-m}J_m(t)\}=-t\{t^{-(m+1)}J_{m+1}(t)\}$。

注意到$\varphi(x)=\psi(|x|)$，其中

$$\psi(r)=\pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)r^{-\left(\frac{n}{2}+\delta\right)}J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi r).$$

因此，为证(5.1)式，只需证明

$$\sup_{r>0}(1+r)^{n/p}|\psi^{(\alpha)}(r)|\leqslant C_{\alpha,p,n},\ \alpha\in N. \tag{5.2}$$

事实上，由 ψ 的表示式和(2)可知，$\psi(r)$ 在 $r=0$ 处右连续，而由 ψ 的表示式和(1)可得

$$\psi(r)=O(r^{-\delta-(n+1)/2}),\ 当\ r\to\infty.$$

以上两个事实便蕴含着

$$|\psi(r)|\leqslant C(1+r)^{-\delta-(n+1)/2},\ 0<r<\infty,$$

其中 C 与 r 无关．其次，由(3)和(2)易知，$\psi'(r)$ 在 $r=0$ 处右连续，而由(3)和(1)可得

$$\psi'(r)=O(r^{-\delta-(n+1)/2}),\ 当\ r\to\infty.$$

由此推出

$$|\psi'(r)|\leqslant C(1+r)^{-\delta-(n+1)/2},\ 0<r<\infty.$$

类似地，可证

$$|\psi^{(\alpha)}(r)|\leqslant C(1+r)^{-\delta-(n+1)/2},\ 0<r<\infty.$$

由此推知：当 $\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$ 及 $0<p<1$ 时，(5.2)式成立．因此，(5.1)式成立．

显然，对任一 $B=B(x_0,r)$，有

$$\inf_{P\in\mathscr{P}_{s-1}}\sup_{x\in B}|\varphi(x)-P(x)|\leqslant\sup_{x\in B}|\varphi(x)-P_\varphi(x)|,$$

其中

$$s=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

以及 $P_\varphi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 $s-1$ 阶 Taylor 多项式．由(5.1)式推出

$$\inf_{P\in\mathscr{P}_{s-1}}\sup_{x\in B}|\varphi(x)-P(x)|\leqslant Cr^s.$$

上式当 $r\geqslant1$ 时蕴含着(当 $r<1$ 时，应以 $\mathscr{P}_{s-1}$ 代替 $\mathscr{P}_s$)

$$|B|^{1-1/p}\inf_{P\in\mathscr{P}_s}\sup_{x\in B}|\varphi(x)-P(x)|\leqslant C.$$

因此，

$$\varphi\in\mathscr{L}_{1/p-1,\infty,[n(1/p-1)]}.$$

从而，

$$(B_{1/\varepsilon}^{\delta}f)(x)=(f*\varphi_{\varepsilon})(x)$$

在 $H^p=H_a^{p,\infty,[(1/p-1)]}$ 上是有定义的，其中 $0<p<1$。$(B_{1/\varepsilon}^{\delta}f)(x)$ 通常称为 f 在 R^n 上的 δ 阶 Bochner-Riesz 平均。

下面，不妨对一般的 $\varphi\in C^\infty$ 来考虑。设 $\varphi\in C^\infty$，且满足(5.1)式。由上面的讨论可知

$$\varphi_+^*(f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)|$$

在 $H^p(R^n)$ 上是有定义的。

定理 5.1 设 $\varphi\in C^\infty(R^n)$，且满足 (5.1) 式，则算子 $f\to\varphi_+^*(f)$ 为弱 (H^p, L^p) 型的，其中 $0<p<1$。此即存在一常数 $C=C_{n,p}$，使得不等式

$$|\{x\in R^n:\varphi_+^*(f)(x)>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^p}/\lambda)^p$$

对一切的 $f\in H^p(R^n)$ 成立。

在证明定理之前，需要建立关于弱型估计的叠加原理。

引理 5.1 设 $0<p<1$。若可测函数序列 $\{f_k\}$ 满足

$$|\{x\in R^n:|f_k(x)|>\lambda\}|\leqslant\lambda^{-p},\ \forall k\in N,$$

以及

$$\sum_k|a_k|^p\leqslant 1,$$

则

$$|\{x\in R^n:|\sum_{k=1}^{\infty}a_kf_k(x)|>\lambda\}|\leqslant\frac{2-p}{1-p}\lambda^{-p}.$$

证明 作函数 f_k 的分解

$$f_k(x)=g_k(x)+b_k(x),$$

其中

$$g_k(x)=\begin{cases}f_k(x), & 当|f_k(x)|\leqslant\lambda/|a_k|,\\ 0, & 当|f_k(x)|>\lambda/|a_k|.\end{cases}$$

如置

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in R^n:b_k(x)\neq 0\},$$

则

$$\begin{aligned}&|\{x\in R^n: |\sum_k a_k f_k(x)|>\lambda\}|\\&\leqslant |E|+|\{x\in E^C: |\Sigma a_k f_k(x)|>\lambda\}|\\&\leqslant |E|+|\{x\in R^n: \sum_k |a_k||g_k(x)|>\lambda\}|\\&\leqslant |E|+\lambda^{-1}\sum_k |a_k|\|g_k\|_1.\end{aligned}$$

注意到

$$|\{x\in \mathbb{R}^n: b_k(x)\neq 0\}|=|\{x\in R^n: |f_k(x)|>\lambda/|a_k|\}|\\ \leqslant (|a_k|/\lambda)^p,$$

则

$$|E|\leqslant \sum_k (|a_k|/\lambda)^p\leqslant \lambda^{-p}.$$

其次，不难看出

$$\begin{aligned}\|g_k\|_1&=\int_{\{x:|f_k(x)|\leqslant\lambda/|a_k|\}}|f_k(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\lambda/|a_k|}|\{x: |f_k(x)|>t\}|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^{\lambda/|a_k|}t^{-p}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-p}(|a_k|/\lambda)^{p-1}.\end{aligned}$$

由此推出

$$\lambda^{-1}\sum_k |a_k|\|g_k\|_1\leqslant (1-p)^{-1}\lambda^{-p}.$$

到此，引理的结论明显成立，证毕。

由引理 5.1，定理 5.1 的证明被归结于如下对原子的弱型估计。

命题 5.1 设 $0<p<1$，则存在一常数 $C=C_{n,p}$，使得不等式

$$|\{x\in R^n: \varphi_+^*(a)(x)>\lambda\}|\leqslant C\lambda^{-p} \tag{5.3}$$

对任一$\left(p, \infty, \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$原子 a 成立。

证明 设 a 为一$\left(p, \infty, \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$原子，且 $\operatorname{supp} a\subset B(x_0, r)$。不难看出，为证(5.3)式，只需证明

$$\varphi_+^*(a)(x)\leqslant C(r+|x-x_0|)^{-n/p}, \tag{5.4}$$

其中 C 仅依赖于 n 和 p。显然，(5.4)式的证明又归结于不等式

$$\varphi_+^*(a)(x)\leqslant C(1+|x|)^{-n/p} \tag{5.5}$$

对一切以 $B(0,1)$ 为支集的

$$\left(p,\ \infty,\ \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$$

原子 a 成立。事实上，先设 $\operatorname{supp} a\subset B(0,r)$。容易验证 $a_0(x)=r^{n/p}a(x)$ 为一$\left(p,\ \infty,\ \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$原子，且 $\operatorname{supp} a_0\subset B(0,1)$。假设(5.5)式对 a_0 已成立，则

$$|\varphi_+^*(a_0)(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n/p}.$$

注意到

$$\begin{aligned}(a*\varphi_\varepsilon)(x)&=\varepsilon^{-n}\int a(x-\xi)\varphi(\xi/\varepsilon)\mathrm{d}\xi\\&=r^{-n/p}\int a_0\left(\frac{x}{r}-\eta\right)\varphi_{\varepsilon/r}(\eta)\mathrm{d}\eta\\&=r^{-n/p}(a_0*\varphi_{\varepsilon/r})(x/r),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\varphi_+^*(a)(x)&\leqslant r^{-n/p}\varphi_+^*(a_0)(x/r)\\&\leqslant C(r+|x|)^{-n/p}.\end{aligned}$$

因此，(5.4)式成立。对于 $\operatorname{supp} a\subset B(x_0,r)$ 的情形，(5.4)式同样成立。从而，余下只需证明(5.5)式，分两种情形考虑。

(i) $\frac{n}{n+1}\leqslant p<1$。首先，由不等式

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant\|a\|_\infty\|\varphi\|_1\leqslant|B(0,1)|^{-1/p}\|\varphi\|_1,$$

可知(5.5)式当 $|x|\leqslant 2$ 时成立。当 $|x|>2$ 时，由(5.1)式易得

$$\begin{aligned}|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|&=\varepsilon^{-n}\left|\int_{|\xi|\leqslant 1}a(\xi)\varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant C\varepsilon^{-n}\int_{|\xi|\leqslant 1}(|x-\xi|/\varepsilon)^{-n/p}\mathrm{d}\xi\\&\leqslant C\varepsilon^{n(1/p-1)}|x|^{-n/p}.\end{aligned}$$

由此推出

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant C|x|^{-n/p},\ \text{当}\ |x|>2\ \text{及}\ 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

当 $|x|>2$ 及 $\varepsilon>1$ 时，由原子的消失矩条件可得

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|=\left|\int_{|\xi|<1}a(\xi)[\varphi_\varepsilon(x-\xi)-\varphi_\varepsilon(x)]d\xi\right|$$

$$\leqslant C\varepsilon^{-n}\int_{|\xi|<1}a(\xi)\left|D\varphi\left(\frac{x-\theta\xi}{\varepsilon}\right)\right|\frac{|\xi|}{\varepsilon}d\xi,$$

其中 $0<\theta<1$。如使用(5.1)式，由上式则得

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant C\varepsilon^{-n-1}\int_{|\xi|<1}\left(\frac{\varepsilon}{|x-\theta\xi|}\right)^{n/p}d\xi$$

$$\leqslant C\varepsilon^{n/p-n-1}|x|^{-n/p}.$$

因此，同样得

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant C|x|^{-n/p},\quad 当 |x|>2 及 \varepsilon>1.$$

(ii) $\frac{n}{n+k+1}\leqslant p<\frac{n}{n+k}$, $k\in N$。如同情形(i)，(5.5)式当 $|x|\leqslant 2$ 时成立，以及

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant C|x|^{-n/p},\ 当 |x|>2 及 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

当 $|x|>2$ 及 $\varepsilon>1$ 时，记 $P(\xi)$ 为 $\varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right)$ 关于 ξ 的 k 阶 Taylor 多项式，并注意到

$$k<n\left(\frac{1}{p}-1\right)\leqslant k+1,$$

由(5.1)式及原子的消失矩条件可得

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|=\varepsilon^{-n}\left|\int_{|\xi|<1}a(\xi)\left[\varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right)-P(\xi)\right]d\xi\right|$$

$$\leqslant C\varepsilon^{-n}\int_{|\xi|<1}\left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right|^{k+1}\left(1+\frac{|x-\theta\xi|}{\varepsilon}\right)^{-n/p}d\xi$$

$$\leqslant C\varepsilon^{n/p-n-k-1}|x|^{-n/p},$$

其中 $0<\theta<1$。由上式也得

$$|(a*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant C|x|^{-n/p},\quad 当 |x|>2 及 \varepsilon>1.$$

到此，(5.5)式得证，命题证毕。

记 $$(B_*^\delta f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|(B_{1/\varepsilon}^\delta f)(x)|,$$

并称它为极大 Bochner-Riesz 平均。注意到当

$$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$$

及 $0<p<1$ 时，对应于 Bochner-Riesz 平均的核 φ 满足(5.1) 式。因此，由定理 5.1 直接推得如下结果。

定理 5.2 设 $0<p<1$，及

$$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2},$$

则算子 $f\mapsto B_*^\delta f$ 为弱(H^p, L^p)型的。此即存在一常数 $C=C_{p,n}$，使得不等式

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:(B_*^\delta f)(x)>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^p}/\lambda)^p \quad (5.6)$$

对一切的 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $\lambda>0$ 成立。

需要指出，(5.6)式在下述意义下是准确的：存在一 C 以及一 $f_0\in H^p(\mathbb{R}^n)$，使得

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:(B_*^\delta f_0)(x)>\lambda\}|>C(\|f_0\|_{H^p}/\lambda)^p. \quad (5.7)$$

以下，仅对 $n=1$ 及 $1/2\leqslant p<1$ 的情形来证明(5.7)式。记

$$f_0(t)=\begin{cases}-1, & \text{当 } -7\pi/6\leqslant t\leqslant -5\pi/6;\\ 1, & \text{当 } -\pi/6\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{6};\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

显然，$f_0\in H_a^{p,\infty,0}(\mathbb{R})=H^p(\mathbb{R})$，且

$$\|f_0\|_{H_a^{p,\infty,0}}=(4\pi/3)^{1/p}.$$

注意到

$$\begin{aligned}(B_*^\delta f_0)(x)&=-\int_{-7\pi/6}^{-5\pi/6}\varphi(x+t)\mathrm{d}t+\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\varphi(x+t)\mathrm{d}t\\&=-\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\{\varphi(x+t+\pi)-\varphi(x+t)\}\mathrm{d}t\\&=Cx^{-1/p}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos\left(x+t-\frac{\pi}{2p}\right)\mathrm{d}t+O(x^{-1/p-1})\\&=Cx^{-1/p}\cos\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)+O(x^{-1/p-1}),\quad x\to\infty,\end{aligned}$$

则必存在 $j_0\in\mathbb{N}$，使得当

$$x\in\left[2\pi j+\frac{\pi}{2p}-\frac{\pi}{6},\ 2\pi j+\frac{\pi}{2p}+\frac{\pi}{6}\right]\triangleq I_j,$$

以及 $j\geqslant j_0$ 时，有

$$(B_1^\delta f_0)(x) \geqslant C x^{-1/p},$$

其中 C 与 x 无关。由此推出

$$\bigcup_{\substack{j \geqslant j_0 \\ I_j \subset (0, (c/\lambda)^p]}} I_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : (B_*^\delta f_0)(x) > \lambda\}.$$

显然，上式蕴含着

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : (B_*^\delta f_0)(x) > \lambda\}| > C\lambda^{-p},$$

这就完成了(5.7)式的证明。

通常，称 δ 为 Bochner-Riesz 平均的阶。特别地，当取

$$\delta = \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2},$$

以及 $0 < p < 1$ 时，称它为 Bochner-Riesz 平均关于 H^p 空间的临界阶，或简称它为临界阶。(5.6)式和(5.7)式表明：当 δ 为临界阶时，定理 5.2 的结论是不可改进的。以下将证明：当 δ 大于临界阶时，定理 5.2 的结论可以加强。

定理 5.3　设 $0 < p \leqslant 1$，以及

$$\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2},$$

则算子 $f \to B_*^\delta f$ 为 (H^p, L^p) 型的。

证明　如注意到第 2 章命题 8.1 的结论对于次线性算子同样成立，那末为证定理，只需证明不等式

$$\|B_*^\delta a\|_p \leqslant C$$

对任一 (p, ∞, s) 原子 a 成立，其中

$$s \geqslant \left[n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right].$$

事实上，在证明(5.1)式时，已证得

$$\varphi(x) = [(1 - |\xi|^2)_+^\delta]^\wedge(x)$$

满足不等式

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{\delta + (n+1)/2} |D^\alpha \varphi(x)| \leqslant C_{\alpha, \delta, n}.$$

如取 $p_1 < p$，使得

$$\delta = \frac{n}{p_1} - \frac{n+1}{2},$$

则由上式推出

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{n/p_1}|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant C_{\alpha,p_1,n}.$$

设 a 为一$(p,\ \infty,\ s)$原子，其中

$$s=\left[n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\right],$$

且 $\operatorname{supp} a\subset B=B(x_0,\ r)$。

不难看出 $\tilde{a}(x)=|B|^{1/p-1/p_1}a(x)$

为一$\left(p_1,\ \infty,\ \left[n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\right]\right)$原子。因此，由(5.4)式推得

$$(B_*^\delta\tilde{a})(x)\leqslant C(r+|x-x_0|)^{-n/p_1},$$

此即

$$(B_*^\delta a)(x)\leqslant Cr^{n(1/p_1-1/p)}(r+|x-x_0|)^{-n/p_1} \tag{5.8}$$

最后，由(5.8)式推得

$$\begin{aligned}\|B_*^\delta a\|_p^p&=\int_{|x-x_0|<2r}|(B_*^\delta a)(x)|^p\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{|x-x_0|>2r}|(B_*^\delta a)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C\left\{\int_{|x-x_0|<2r}r^{-n}\mathrm{d}x\right.\\&\quad\left.+\int_{|x-x_0|>2r}r^{np(1/p_1-1/p)}|x-x_0|^{-np/p_1}\mathrm{d}x\right\}\leqslant C.\end{aligned}$$

因此，定理证毕。

在定理5.3的条件下，如果代替 $B_*^\delta f$ 而考虑 $B_{1/\tau}^\delta f$，则定理5.3的结论又可以加强。

定理 5.4 设$0<p\leqslant1$，以及$\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$，则算子 $f\to B_{1/\tau}^\delta f$ 为$(H^p,\ H^p)$型的，且满足

$$\|B_{1/\tau}^\delta f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{H^p},$$

其中 C 与 f、τ 无关。

证明 由第2章命题8.2，只需证明：若 a 为任一$(p,\ \infty,\ s)$原子，其中

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

则 $B_{1/\tau}^\delta a$ 为一$(p,\ \infty,\ s,\ \varepsilon)$分子，且满足

$$\mathcal{N}_\infty(B^\delta_{1/\tau}a)\leqslant C,$$

其中
$$\varepsilon>\max\left\{s/n,\ \frac{1}{p}-1\right\},$$

以及常数 C 与 a、τ 无关。

设 a 为一 $(p,\ \infty,\ s)$ 原子，且
$$\operatorname{supp}\ a\subset B=B(x_0,\ r).$$

取一 $p_1\in(0,\ p)$，使得
$$\delta=\frac{n}{p_1}-\frac{n+1}{2}.$$

又取一 $\varepsilon>0$，使得
$$\frac{1}{p}-1<\varepsilon<\frac{1}{p_1}-1.$$

记
$$a_0=1-\frac{1}{p}+\varepsilon,\quad b_0=1+\varepsilon,$$

以及
$$s=\left[n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\right].$$

显然，由(5.8)式可得
$$\begin{aligned}|(B^\delta_{1/\tau}a)(x)|x-x_0|^{nb_0}|&\leqslant Cr^{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}\right)}\\&\quad\cdot|x-x_0|^{nb_0}(r+|x-x_0|)^{-n/p_1}\\&\leqslant Cr^{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}\right)}(r+|x-x_0|)^{nb_0-(n/p_1)}\\&\leqslant Cr^{nb_0-(n/p)},\end{aligned}$$

以及
$$|(B^\delta_{1/\tau}a)(x)|\leqslant Cr^{-n/p}.$$

因此，
$$\mathcal{N}_\infty(B^\delta_{1/\tau}a)\leqslant C(r^{-n/p})^{a_0/b_0}(r^{nb_0-n/p})^{1-(a_0/b_0)}\leqslant C.$$

余下，只需验证消失矩条件
$$\int(B^\delta_{1/\tau}a)(x)x^\nu\mathrm{d}x=0,\ |\nu|\leqslant s. \tag{5.9}$$

注意到
$$\begin{aligned}\int(B^\delta_{1/\tau}a)(x)x^\nu\mathrm{d}x&=[(B^\delta_{1/\tau}a)(t)t^\nu]^\wedge(0)\\&=D^\nu[(B^\delta_{1/\tau}a)^\wedge(\cdot)](0)\end{aligned}$$

$$= D^{\nu}(\phi_{\tau} \cdot \hat{a})(0)$$
$$= \sum_{|\alpha|+|\beta|=|\nu|} C_{\alpha,\beta}(D^{\alpha}\hat{a})(0) \cdot (D^{\beta}\phi_{\tau})(0),$$

由引理 1.1 便知(5.9)式成立，定理证毕。

鉴于 Bochner-Riesz 平均在 Fourier 分析中的重要地位，有关这个算子的拓广形式有着许多的研究工作。这里只介绍两类重要的拓广形式。首先，考虑由下式定义的算子：

$$(B_{1/\varepsilon}^{\delta,k} f)^{\wedge}(x) = (1 - |\varepsilon x|^{k})_{+}^{\delta} \hat{f}(x), \quad f \in \mathscr{S}.$$

通常，$B_{1/\varepsilon}^{\delta,k} f$ 称为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的广义 Bochner-Riesz 平均。显然，当 $k=2$ 时，它就是 Bochner-Riesz 平均。广义 Bochner-Riesz 平均又可表示成

$$(B_{1/\varepsilon}^{\delta,k} f)(x) = (f * \varphi_{\varepsilon})(x),$$

其中

$$\varphi(x) = [(1 - |\xi|^{k})_{+}^{\delta}]^{\wedge}(x).$$

作为一类乘子算子，$B_{1/\varepsilon}^{\delta,k} f$ 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性质可以用 Fourier 乘子定理归结于 $k=2$ 时的已知情形。事实上，设

$$\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2},$$

以及 $0<p<1$。不妨认为 $\varepsilon=1$，如取一 $\psi \in \mathscr{S}$，满足 $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$，以及

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leqslant 3/2, \\ 0, & \text{当 } |x| \geqslant 2, \end{cases}$$

则可将 $(1-|x|^{k})_{+}^{\delta}$ 写成

$$(1 - |x|^{k})_{+}^{\delta} = \left\{\psi(x)\left[\frac{1-|x|^{k}}{1-|x|}\right]^{\delta}\right\}$$
$$\cdot \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{\delta}(1-|x|^{2})_{+}^{\delta}.$$

不难验证

$$m_1(x) = \psi(x)\left[\frac{1-|x|^{k}}{1-|x|}\right]^{\delta} \quad 和 \quad m_2(x) = (1+|x|)^{-\delta}$$

均满足乘子的 Hörmander 条件(2.4)式。因此，由定理 2.3 和定理 5.4 便得到以下结果。

定理 5.5 设 $0<p\leqslant1$, $\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$, 以及 $k\leqslant0$, 则算子 $f\mapsto B_{1/\varepsilon}^{\delta,k}f$ 为(H^p, H^p)型的，且满足

$$\|B_{1/\varepsilon}^{\delta,k}f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{H^p},$$

其中 c 与 f、ε 无关。

对于极大广义 Bochner-Riesz 平均

$$B_{*}^{\delta,k}f=\sup_{\varepsilon>0}|B_{1/\varepsilon}^{\delta,k}f|,$$

它是否有类似于定理 5.2 的结论，这是不能明显看出的。事实上，定理 5.2 的证明是基于

$$\varphi_1(x)=[(1-|\xi|^2)_+^{\delta}]^{\wedge}(x)$$

满足(5.1)式这一事实，而后者是由 $\varphi_1(x)$的显式表达式和 Bessel 函数的性质得到的。但是，当

$$\varphi_2(x)=[(1-|\xi|^k)_+^{\delta}]^{\wedge}(x)$$

以及 $k\neq2$ 时，不存在类似的事实。因此，必寻找一种能代替(5.1)式的上述 φ_2 的估计。为此，以下首先建立 φ_1 同 φ_2 之间的关系。

命题 5.2 设 $k\in N$, $\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$, $0<p<1$, 以及

$$N=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],$$

则

$$[(1-|\xi|^k)_+^{\delta}]^{\wedge}(x)=\sum_{j=0}^{J}b_j[(1-|\xi|^2)_+^{\delta+j}]^{\wedge}(x)+T(|x|),$$

其中 J 仅依赖于 n、p 及 k, 且 T满足

$$|T^{(N+1)}(s)|\leqslant C(1+s)^{-n-N-2},\ 0<s<\infty. \tag{5.10}$$

在证明命题之前，先叙述三个辅助引理，它们是有关 Bessel 函数的积分之估计，其证明是初等的，可在[Ch1]或[W1]中找到。

引理 5.2 设 $\varphi\in C^{2q}(0,\infty)$, $q\in N$,

$$I(u)=\int_0^{\infty}\varphi(t)t^{\frac{n}{2}+\tau}J_{\frac{n}{2}+\tau-1}(ut)dt,$$

以及微分算子 Δ 由下式定义：

$$\Delta\varphi(t)=\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)+\frac{n+2\tau-1}{t}\frac{d}{dt}\varphi(t).$$

若 $q\geqslant(n+2\tau+2)/2$，且 φ 满足

$$\int_0^{\infty}|\Delta^q\varphi(t)|t^{n+2\tau-1}dt<\infty,$$

则

$$|I(u)|\leqslant Cu^{-\left(\frac{n}{2}+\tau+3\right)},$$

其中 c 与 u 无关。

引理 5.3 设 $\varphi\in C_c^{\infty}(0,\infty)$，且

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<t\leqslant 1/3,\\ 0, & \text{当 } 2/3\leqslant t<\infty,\end{cases}$$

则存在一 $\delta_1(t)\in C^{2M}(0,\infty)$，以及一 $2M$ 阶多项式 $P(t)$，满足

$$\int_0^1(1-t^k)^\delta\varphi(t)t^{\frac{n}{2}+N+1}J_{\frac{n}{2}+N}(st)dt$$

$$=s^{-k}\int_0^{\infty}\delta_1(t)t^{\frac{n}{2}+N+k+1}J_{\frac{n}{2}+N+k}(st)dt$$

$$+s^{-k}\int_0^{\infty}e^{-t}P(t)t^{\frac{n}{2}+N+1}J_{\frac{n}{2}+N+k}(st)dt,$$

其中

$$\Delta^M\delta_1(t)=O(t^{-k}),\ \text{当 } t\to O_+,$$

$$\Delta^M\delta_1(t)=O(t^{2M}e^{-t}),\ \text{当 } t\to\infty,$$

以及

$$M=\begin{cases}\dfrac{n}{2}+N+2+k, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\[2ex] \dfrac{n}{2}+N+\dfrac{5}{2}+k, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

引理 5.4 设 $m\in\mathbb{N}$，$P(t)$ 为 $2M$ 次的多项式，则

$$\int_0^{\infty}e^{-t}P(t)t^{m/2}J_{\frac{m}{2}+p-1}(ut)dt$$

$$=\frac{C}{u^{\frac{m}{2}+1}}+O\left(u^{-\left(\frac{m}{2}+2\right)}\right),\ \text{当 } u\geqslant 1,$$

其中 C 仅依赖于 n、m、P、及 M。

命题 5.2 的证明　记正整数 M 如引理 5.3 中所述。不难证明

满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left\{P(1-t^2)-\left[\frac{1-t^N}{1-t^2}\right]^\delta\right\}\Big|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant j\leqslant 2M+1 \tag{5.11}$$

的多项式 $P(t)\in\mathscr{P}_{2M+1}$ 是唯一的，记此唯一的多项式为

$$Q(t)=\sum_{j=0}^{2M+1}b_jt^j.$$

由径向函数的 Fourier 变换公式得

$$\begin{aligned}
&[(1-|\xi|^N)_+^\delta]^\wedge(x)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^1(1-t^N)^\delta t^{n/2}\frac{J_{n/2-1}(|x|t)}{|x|^{n/2-1}}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^1(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)\,t^{n-1}\,\frac{J_{n/2-1}(|x|t)}{(|x|t)^{n/2-1}}\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^1[(1-t^N)^\delta\\
&\quad-(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)]\,t^{n-1}\,\frac{J_{n/2-1}(|x|t)}{(|x|t)^{n/2-1}}\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{j=0}^{2M+1}b_j[(1-|\xi|^2)_+^{\delta+j}]^\wedge(x)+T(|x|),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
T(s)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^1&[(1-t^N)^\delta\\
&-(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)]t^{n-1}\frac{J_{n/2-1}(st)}{(st)^{n/2-1}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因此，余下只需证明 $T(s)$ 满足(5.10)式。

由等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\mu}J_\mu(x))=-x^{-\mu}J_{\mu+1}(x),$$

得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T(s)}{\mathrm{d}s}=-(2\pi)^{-n/2}s\int_0^1&[(1-t^N)^\delta\\
&-(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)]t^{n+1}\frac{J_{n/2}(st)}{(st)^{n/2}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

如重复上述微分等式 $N+1$ 次(不妨设 $N+1$ 为偶数)，则得

$$T^{(N+1)}(s)=\sum_{i=0}^{(N+1)/2}\frac{C_i}{s^{n/2+i-1}}\int_0^1\left[(1-t^k)^\delta\right.$$

$$\left.-(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)\right]t^{n/2+N+1-i}J_{n/2+N-i}(st)\mathrm{d}t, \tag{5.12}$$

其中 $C_i=C_i(n,\ k,\ p)$。由上式以及 Bessel 函数在原点附近的渐近性质可得

$$|T^{(N+1)}(s)|\leqslant C_{n,p,k},\quad 0<s<1. \tag{5.13}$$

当 $s\geqslant 1$ 时，需要考虑两种情形：k 为偶数和 k 为奇数。记

$$h(t)=\left[(1-t^k)^\delta-(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)\right]\mathscr{X}_{(0,1)}(t).$$

由(5.11)式可知 $h(t)\in C^{2M}(0,\ \infty)$，且当 k 为偶数时，

$$\lim_{t\to 0+}\Delta^M h(t)$$

存在，因此，

$$|\Delta^M h(t)|\leqslant C_{n,k,p}, \tag{5.14}$$

由(5.12)、(5.14)式，并使用引理 5.2 便得

$$|T^{(N+1)}(s)|\leqslant Cs^{-(n+N+3)},\ \text{当 } s\geqslant 1 \text{ 及 } k \text{ 为偶数.} \tag{5.15}$$

当 $s\geqslant 1$ 及 k 为奇数时，取一 $\varphi\in C_c^\infty[0,\ \infty)$，满足

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 1/3,\\ 0, & \text{当 } 2/3\leqslant t<\infty,\end{cases}$$

并记 $\Psi(t)=1-\varphi(t)$。由于对(5.12)式右端各项的估计方法是相同的，故以下只对(5.12)式右端第一项($i=0$)给出估计。将这一项写成

$$\begin{aligned}&\frac{C_0}{s^{n/2-1}}\int_0^1 h(t)t^{n/2+N+1}J_{n/2+N}(st)\mathrm{d}t\\ =&\frac{C_0}{s^{n/2-1}}\int_0^1 h(t)\Psi(t)t^{n/2+N+1}J_{n/2+N}(st)\mathrm{d}t\\ &+\frac{C_0}{s^{n/2-1}}\int_0^1(1-t^k)^\delta\varphi(t)t^{n/2+N+1}J_{n/2+N}(st)\mathrm{d}t\\ &-\frac{C_0}{s^{n/2-1}}\int_0^1(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)\varphi(t)t^{n/2+N+1}J_{n/2+N}(st)\mathrm{d}t\\ \triangleq\ &T_1(s)+T_2(s)+T_3(s).\end{aligned}$$

注意到如以 $h(t)\Psi(t)$ 或 $(1-t^2)^\delta Q(1-t^2)\varphi(t)$ 代替 $h(t)$，(5.14) 式同样成立。因此，由引理 5.2 同样可得

$$|T_1(s)|\leqslant Cs^{-(n+N+3)}, \text{ 当 } s\geqslant 1 \text{ 及 } k \text{ 为奇数，}$$

以及

$$|T_3(s)|\leqslant Cs^{-(n+N+3)}, \text{ 当 } s\geqslant 1 \text{ 及 } k \text{ 为奇数。}$$

对于 $T_2(s)$，如使用引理 5.3，则可将它写成

$$T_2(s)=\frac{C_0}{s^{n/2+k-1}}\int_0^\infty \vartheta_1(t)t^{n/2+N+k+1}J_{n/2+N+k}(st)\mathrm{d}t$$
$$+\frac{C_0}{s^{n/2+k-1}}\int_0^\infty e^{-t}P(t)t^{n/2+N+1}J_{n/2+N+k}(st)\mathrm{d}t$$
$$\triangleq T_{21}(s)+T_{22}(s).$$

注意到 $\vartheta_1(t)$ 也满足引理 5.2 的条件，则

$$|T_{21}(s)|\leqslant Cs^{-(n+N+2k+2)}, \text{ 当 } s\geqslant 1 \text{ 及 } k \text{ 为奇数，}$$

最后，由引理 5.4 得

$$|T_{22}(s)|\leqslant Cs^{-(n+N+k+1)}, \text{ 当 } s\geqslant 1 \text{ 及 } k \text{ 为奇数。}$$

综合以上各式得

$$|T(s)|\leqslant Cs^{-(n+N+2)}, \text{ 当 } s\geqslant 1 \text{ 及 } k \text{ 为奇数。} \qquad (5.16)$$

显然，命题的结论由(5.13)、(5.15)和(5.16)式直接推得，证毕。

利用命题 5.2，可以建立临界阶极大广义 Bochner-Riesz 平均在 $H^p(R^n)$ 上的弱型估计。

定理 5.6 若 $0<p<1$，$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$，以及 $k\in N$，则算子 $f\mapsto B_*^{\delta,k}f$ 为弱(H^p, L^p)型的。此即存在一常数 C，使得不等式

$$|\{x\in R^n: (B_*^{\delta,k}f)(x)>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^p}/\lambda)^p$$

对任一 $f\in H^p(R^n)$ 和 $\lambda>0$ 成立。

证明 由命题 5.2 得

$$(B_R^{\delta,k}f)(x)=\sum_{j=0}^{J}b_j(B_R^{\delta+j}f)(x)+(f*T_{1/R})(x).$$

因此，如记

$$\|b\|=\sum_{j=0}^{J}|b_j|,$$

则

$$|\{x\in R^n;\ (B_*^{\delta,R}f)(x)>\lambda\}|$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{J}|\{x\in R^n;\ (B_*^{\delta+j}f)(x)>\lambda/2\|b\|\}|$$

$$+|\{x\in R^n;\ \sup_{R>0}|(f*T_{1/R})(x)|>\lambda/2\}|.$$

由定理 5.2 和定理 5.3 可知，为证定理，只需证明

$$|\{x\in R^n;\ \sup_{R>0}|(f*T_{1/R})(x)|>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^p}/\lambda)^p.$$

如以(5.10)式代替(5.1)式，不难看出上式的证明是完全类似于定理 5.1 的，证毕。

现在，考虑另一类 Bochner-Riesz 平均的拓广形式

$$(E_R^\delta f)(x)=(f*e_R^\delta)(x),$$

其中核

$$e_R^\delta(x)=(2\pi)^{-n}\int_{a(\xi)<R}\left(1-\frac{a(\xi)}{R}\right)^\delta e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

以及

$$a(\xi)=\sum_{|J|\leqslant m}a_J\xi^J\geqslant 0.$$

当 $a(\xi)=|\xi|^2$ 时，$E_R^\delta f$ 就是 δ 阶 Bochner-Riesz 平均。在一般情形下，当 a_J 为实数时，$a(\xi)$对应于常系数椭圆微分算子

$$a(D)=\sum_{|J|\leqslant m}a_JD^J.$$

因此，$E_R^\delta f$ 通常称为常系数椭圆微分算子本征展开的 Riesz 平均，简称为椭圆 Riesz 平均。注意到这一类算子的定义中，没有对超曲面 $\{\xi\in\mathbb{R}^n,\ a(\xi)=R\}$ 的几何性质有任何规定，这将导致其核 $e_R^\delta(x)$的点态估计不会很理想。事实上，J. Peetre[Pe 1] 曾研究过 $E_R^\delta f$ 在 $L^p(R^n)$，$1\leqslant p<\infty$，上的有界性质。同 E. M. Stein [St1] 中关于 Bochner-Riesz 平均的经典结果相比较，就指标 δ 而言，J. Peetre 关于椭圆 Riesz 平均的相应结果是较粗糙的。造成这种情况的原因就在于对核 e_R^δ 的点态估计时，不能利用超曲面 $\{\xi\in R^n;\ a(\xi)=R\}$ 的任何几何性质，从而难于得到像 Bochner-Riesz 平均之核那样好的点态估计。因此，如果要研究椭圆 Riesz 平均在 $H^p(R^n)$ $(0<p\leqslant 1)$上的有界性质，就不能仿照定理 5.4 的

证明那样从核的点态估计出发，否则，所得到的结果必然也是粗糙的。基于以上的考虑，下面将使用对核 e_R^δ 及其导数在集合 $\{x\in\mathbb{R}^n; |x|\geqslant r\}$ 上的 L^1 估计来建立 $E_R^\delta f$ 在 $H^p(R^n)$ 上的有界性质。

定理 5.7 设 $0<p\leqslant 1$，以及

$$\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2},$$

则对充分大的 R，有

$$\|E_R^\delta f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{H^p},$$

其中 C 与 f、R 无关。

上述定理的证明是基于下面一个引理上的。

引理 5.5 对充分大的 R，成立以下估计：

i) 若 $2\leqslant q\leqslant\infty$，以及 $\delta>0$，则

$$\left(\int_{|x|\geqslant r}|D^J e_R^\delta(x)|^q dx\right)^{1/q}\leqslant CC_0^{|J|}\frac{R^{|J|/m+n/pm}}{(1+R^{1/m}r)^{\delta+1/p}};$$

ii) 若 $1\leqslant q<2$，以及 $\delta>\frac{n-1}{2}$，则

$$\left(\int_{|x|\geqslant r}|D^J e_R^\delta(x)|^q dx\right)^{1/q}\leqslant CC_0^{|J|}\frac{R^{|J|/m+n/pm}}{(1+R^{1/m}r)^{\delta-n-1/2+n/p}},$$

其中 $1/p+1/q=1$，常数 C 和 C_0 均与 R，r，J 无关。

证明 先证 i)。当 $|J|=0$ 时，i)是已知的（见[Ma1]）。以下设 $|J|>0$。显然，当 R 充分大时，由 $a(\xi)\leqslant R$ 可知

$$|\xi|\leqslant C_1R^{1/m},$$

其中，C_1 为某一正常数。取一 $\varphi\in C_0^\infty$，使得

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}1, & 当 |\xi|\leqslant C_1;\\ 0, & 当 |\xi|>C_2 (C_2>C_1).\end{cases}$$

此时，

$$\begin{aligned}D^J e_R^\delta(x)&=(2\pi)^{-n}\int_{a(\xi)<R}e^{i\langle x,\xi\rangle}\left(1-\frac{a(\xi)}{R}\right)^\delta\xi^J\varphi(R^{-1/m}\xi)d\xi\\&=R^{|J|/m}\int_{\mathbb{R}^n}e_R^\delta(y)\Psi^J_{R^{-1/m}}(x-y)dy,\end{aligned}$$

其中
$$\Psi^J_{R^{-1/m}}(x)=R^{n/m}\Psi^J(R^{1/m}x),$$

以及

$$\Psi^J(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\xi^J\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

不难看出，对任一 $k>0$，有

$$|\Psi^J(x)|\leqslant CC_0^{|J|}(1+|x|)^{-k},\tag{5.17}$$

其中 C 和 C_0 与 R、J、x 无关。如果 $r\leqslant R^{-1/m}$，则由 i) 中 $|J|=0$ 时的结论以及(5.17)式得

$$\begin{aligned}&\left(\int_{|x|\geqslant r}|D^J e_R^\delta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&=R^{|J|/m}\left(\int_{|x|\geqslant r}\left|\int_{\mathbb{R}^n}e_R^\delta(y)\Psi^J_{R^{-1/m}}(x-y)\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\leqslant R^{|J|/m}\|e_R^\delta\|_q\|\Psi^J\|_1\leqslant CC_0^{|J|}R^{|J|/m+n/pm}.\end{aligned}$$

如果 $r>R^{-1/m}$，则

$$\begin{aligned}&\left(\int_{|x|\geqslant r}|D^J e_R^\delta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\leqslant R^{|J|/m}\left(\int_{|x|\geqslant r}\left|\int_{|y|<r/2}e_R^\delta(y)\Psi^J_{R^{-1/m}}(x-y)\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\quad+R^{|J|/m}\left(\int_{|x|\geqslant r}\left|\int_{|y|>r/2}e_R^\delta(y)\Psi^J_{R^{-1/m}}(x-y)\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\triangleq I_1+I_2.\end{aligned}$$

注意到当 $|x|\geqslant r$，及 $|y|\leqslant r/2$ 时，有 $|x-y|>|x|/2$。因此，由(5.17)式可得

$$|\Psi^J_{R^{-1/m}}(x-y)|\leqslant CC_0^{|J|}R^{(n-k)/m}|x|^{-k}.$$

由 i) 中 $|J|=0$ 时的结论，并对

$$k=\delta+\frac{1}{p}+\frac{n}{q}+n,$$

使用上式便得

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant CC_0^{|J|}R^{(|J|+n-k)/m}\|e_R^\delta\|_\infty r^n\left(\int_{|x|\geqslant r}|x|^{-kq}\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\leqslant CC_0^{|J|}\frac{R^{|J|/m+n/pm}}{(R^{1/m}r)^{\delta+1/p}}.\end{aligned}$$

同理可得

$$|I_2|\leqslant R^{|J|/m}\|\Psi^J\|_1\left(\int_{|y|>r/2}|e_R^\delta(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

$$\leqslant CC_0^{|J|}\frac{R^{|J|/m+n/pm}}{(R^{1/m}r)^{\delta+1/p}}.$$

因此，当$|J|>0$时，i)也成立。

至于 ii)的结论，它可由 i)推出。事实上，

$$\left(\int_{|x|\geqslant r}|D^J e_R^\delta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{2^k r\leqslant|x|<2^{k+1}r}|D^J e_R^\delta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{|x|\geqslant 2^k r}|D^J e_R^\delta(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}(2^k r)^{n(1/q-1/2)}$$

$$\leqslant CC_0^{|J|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^{|J|/m+n/2m}}{(1+R^{1/m}2^k r)^{\delta+1/2}}(2^k r)^{n(1/q-1/2)}.$$

以下仍分两种情形考虑。当$r\leqslant R^{-1/m}$时，取k_0，使得

$$2^{k_0}r\leqslant R^{-1/m}<2^{k_0+1}r.$$

此时，

$$\sum_{k=0}^{k_0}\frac{R^{|J|/m+n/2m}}{(1+R^{1/m}2^k r)^{\delta+1/2}}(2^k r)^{n/(1/q-1/2)}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{k_0}R^{|J|/m+n/2m}(2^k r)^{n(1/q-1/2)}$$

$$\leqslant CR^{|J|/m+n/2m}(2^{k_0}r)^{n(1/q-1/2)}\leqslant CR^{|J|/m+n/pm},$$

以及

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{R^{|J|/m+n/2m}}{(1+R^{1/m}2^k r)^{\delta+1/2}}(2^k r)^{n(1/q-1/2)}$$

$$\leqslant\sum_{k=k_0+1}^{\infty}R^{|J|/m+1/m(n/2-\delta-1/2)}(2^k r)^{n(1/q-1/2)-\delta-1/2}$$

$$\leqslant CR^{|J|/m+1/m(n/2-\delta-1/2)}(2^{k_0}r)^{n(1/q-1/2)-\delta-1/2}$$

$$\leqslant CR^{|J|m+n/pm}.$$

当$r>R^{-1/m}$时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^{|J|/m+n/2m}}{(1+R^{1/m}2^k r)^{\delta+1/2}}(2^k r)^{n(1/q-1/2)}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}R^{|J|/m+1/m(n/2-\delta-1/2)}(2^k r)^{n(1/q-1/2)-\delta-1/2}$$

$$\leqslant CR^{|J|/m+1/m(n/2-\delta-1/2)}r^{n(1/q-1/2)-\delta-1/2}$$

$$\leqslant C\frac{R^{|J|/m+n/pm}}{(R^{1/m}r)^{\delta-(n-1)/2+n/p}}.$$

因此，ii)成立，引理证毕。

定理 5.7 的证明 不妨只考虑 $0<p<1$ 的情形。事实上，注意到当 $\delta>\frac{n-1}{2}$ 时，算子 $f\mapsto E_R^\delta f$ 为 (L^2, L^2) 型的。因此，$p=1$ 时的定理结论可由上述结论和 $0<p<1$ 时的结论，并对次线性算子 $f\mapsto P_+^*(E_R^\delta f)$ 使用第 2 章定理 5.1 便不难得到。

以下设 $0<p<1$。由第 2 章命题 8.2，只需证明：若 a 为任一 (p, ∞, s) 原子，其中

$$s\geqslant\left[\delta-\frac{n-1}{2}\right],$$

则 $E_R^\delta a$ 为 $\left(p, 1, \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right], \varepsilon\right)$ 分子，且满足

$$\mathcal{N}_1(E_R^\delta a)\leqslant C, \tag{5.18}$$

其中 C 与 a、R 无关，ε 满足

$$n\left(\frac{1}{p}-1\right)<n\varepsilon<\delta-\frac{n-1}{2}.$$

不失一般性，可设原子 a 的中心在原点，且 $\operatorname{supp} a\subset B(0, r)$。如同(5.9)式的证明，可知 $E_R^\delta a$ 满足消失矩条件。因此，余下只需证明(5.18)式。事实上，如果能证明以下两式：

$$\|E_R^\delta a\|_1\leqslant Cr^{n(1-1/p)} \tag{5.19}$$

和

$$\||\cdot|^{n\varepsilon}(E_R^\delta a)(\cdot)\|_1\leqslant Cr^{n(1-1/p+\varepsilon)}, \tag{5.20}$$

则(5.18)式可由它们直接推出：

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(E_R^\delta a)&=(\|E_R^\delta a\|_1)^{1-1/p+\varepsilon}(\||\cdot|^{n\varepsilon}(E_R^\delta a)(\cdot)\|_1)^{1/p-1}\\&\leqslant Cr^{n(1-1/p)(1-1/p+\varepsilon)}r^{n(1-1/p+\varepsilon)(1/p-1)}\leqslant C.\end{aligned}$$

下面，分别来验证(5.19)式和(5.20)式。首先，

$$\begin{aligned}\|E_R^\delta a\|_1&=\int_{|x|<2r}|(E_R^\delta a)(x)|\,dx+\int_{|x|>2r}|(E_R^\delta a)(x)|\,dx\\&\triangleq I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然，

$$I_1\leqslant\|a\|_\infty\|e_R^\delta\|_1(2r)^n\leqslant Cr^{n(1-1/p)}.$$

对于 I_2，考虑两种情形．当 $R^{1/m}r\geqslant 1$ 时，由引理 5.5 ii)得

$$I_2=\int_{|x|>2r}\left|\int_{|v|<r}a(v)e_R^\delta(x-v)\mathrm{d}v\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|a\|_1\int_{|x|>r}|e_R^\delta(x)|\mathrm{d}x\leqslant Cr^{n(1-1/p)}.$$

当 $R^{1/m}r<1$ 时，将 $e_R^\delta(x-\xi)$ 展成 ξ 的幂级数

$$e_R^\delta(x-\xi)=\sum_{J\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{i^{|J|}D^Je_R^\delta(x)}{J!}(-\xi)^J.$$

此时，由原子的消失矩条件得

$$I_2=\int_{|x|>2r}\left|\int_{|\xi|<r}a(\xi)e_R^\delta(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{\substack{J\in\mathbb{Z}_+^n\\|J|\geqslant s+1}}\frac{1}{J!}\left(\int_{|\xi|<r}|a(\xi)||\xi|^{|J|}\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{|x|>2r}|D^Je_R^\delta(x)|\mathrm{d}x\right).$$

因此，由引理 5.5 ii)可得

$$I_2\leqslant C\sum_{\substack{J\in\mathbb{Z}_+^n\\|J|\geqslant s+1}}\frac{C_0^{|J|}}{J!}\left(\int_{|\xi|<r}|a(\xi)||\xi|^{|J|}\mathrm{d}\xi\right)R^{|J|/m}$$

$$\leqslant C\sum_{\substack{J\in\mathbb{Z}_+^n\\|J|\geqslant s+1}}\frac{C_0^{|J|}}{J!}r^{n(1-1/p)+|J|}R^{|J|/m}\leqslant Cr^{n(1-1/p)}.$$

上式最后一步用到了 $R^{1/m}r<1$．因此(5.19)式成立．

为证(5.20)式，将它写成

$$\||\cdot|^{ns}(E_R^\delta a)(\cdot)\|_1=\int_{|x|\leqslant 2r}|x|^{ns}|(E_R^\delta a)(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kr<|x|\leqslant 2^{k+1}r}|x|^{ns}|(E_R^\delta a)(x)|\mathrm{d}x$$

$$\triangleq I_3+I_4.$$

显然，

$$I_3\leqslant Cr^{ns}I_1\leqslant Cr^{n(1-1/p+s)}.$$

对于 I_4，仍分两种情形：$R^{1/m}r\geqslant 1$ 和 $R^{1/m}r<1$．但不论何种情形，如依类似于对 I_2 的估计，总得

$$\int_{|x|>2^kr}|(E_R^\delta a)(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^{k(n-1)/(2-\delta)}r^{n(1-1/p)}C.$$

因此，

$$I_4 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+1}r)^{n\varepsilon}\int_{|x|>2^k r}|(E_R^\delta a)(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}2^{k((n-1)/2+n\varepsilon-\delta)}r^{n(1-1/p+\varepsilon)}$$

$$\leqslant Cr^{n(1-1/p+\varepsilon)}.$$

从而，(5.20)式成立，定理证毕.

注 5.1 设 $\varphi(x)=[P(\xi/|\xi|)(1-|\xi|^2)_+^\delta]^\wedge(x)$，其中 $P(x)$ 为 m 次齐次调和多项式，则

$$(\tilde{B}_{1/\varepsilon}^\delta f)(x)=(f*\varphi_\varepsilon)(x)$$

称为 f 在 R^n 上的共轭 Bochner-Riesz 平均。不难证明：当

$$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$$

及 $0<p<1$ 时，φ 不满足(5.1)式。陆善镇[Lu1]对极大算子

$$f\to\sup_{\varepsilon>0}|\tilde{B}_{1/\varepsilon}^\delta f|$$

作适当修正后得到弱 H^p 有界性的结果：若

$$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2},$$

及

$$\frac{n}{n+1}\leqslant p<1,$$

则

$$|\{x\in R^n:\sup_{\varepsilon>0}|(\tilde{B}_{1/\varepsilon}^\delta f)(x)-\tilde{f}_\varepsilon(x)|>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^p}/\lambda)^p,$$

其中 C 与 f、λ 无关，以及

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=(2\pi)^{-n}\int_{|y|>\varepsilon}f(x-y)\frac{P(y/|y|)}{|y|^n}\mathrm{d}y.$$

§6 H^p 乘子的转移定理

众所周知，乘子理论在 Fourier 分析中具有基本的重要性，它在其它数学领域里也有广泛的应用。1965 年，K.de Leeuw [De1] 证明了一个反映 $L^p(R^n)$ 乘子同 $L^p(T^n)$ 乘子($p\geqslant1$)之间深刻关系

的定理。后来，E. M. Stein, G. Weiss[SW2] 中建立了上述定理在一定意义下的逆定理。这两个定理合在一起反映了 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 乘子同 $L^p(T^n)$ 乘子之间的转移关系。这种转移关系能使 Fourier 分析中某些周期性问题同非周期性问题得以互相转化。本节的目的在于对 $0<p\leqslant 1$，研究 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 乘子同 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 乘子之间的转移关系，从而，将 de Leeuw-Stein-Weiss 的结果推广到 $0<p\leqslant 1$ 情形中去。应当指出：由于 H^p 不是赋范空间 $(0<p<1)$，故建立 H^p 乘子的转移关系时，比起 $L^p(p\geqslant 1)$ 经典情形要复杂一些。

定义 6.1 数列 $\tilde{m}=\{m_k: k\in \boldsymbol{Z}^n\}$ 称为 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 乘子，是指由等式

$$(T_{\tilde{m}}f)(x)=\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^n} m_k a_k(f)e^{2\pi i k\cdot x},\ f\in H^p(\boldsymbol{T}^n)\cap L^2(\boldsymbol{T}^n),$$

所确定的算子 $T_{\tilde{m}}$ 能扩张为 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 到 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 的有界算子，其中 $a_k(f)$ 为 f 的 Fourier 系数。

同 $\boldsymbol{R}^n$ 中情形一样，如果 $T_{\tilde{m}}$ 能扩张为 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 上的有界算子，此即 $T_{\tilde{m}}$ 满足不等式

$$\|T_{\tilde{m}}f\|_{H^p(\boldsymbol{T}^n)}\leqslant C\|f\|_{H^p(\boldsymbol{T}^n)},$$

则将满足上式的最小常数 C 记作 $\|T_{\tilde{m}}\|_{H^p(\boldsymbol{T}^n)\to H^p(\boldsymbol{T}^n)}$。

下面两个定理反映了 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 乘子同 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 乘子之间的转移关系。

定理 6.1 设 $0<p\leqslant 1$，$m(x)$ 为 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 乘子，且

$$m(0)=0,$$

则 $\tilde{m}=\{m(k): k\in \boldsymbol{Z}^n\}$ 为一 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 乘子，且

$$\|T_{\tilde{m}}\|_{H^p(\boldsymbol{T}^n)\to H^p(\boldsymbol{T}^n)}\leqslant 2^{1/p}\|T_m\|_{H^p(\boldsymbol{R}^n)\to H^p(\boldsymbol{R}^n)}.$$

定理 6.2 设 $0<p\leqslant 1$，$m(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ 上连续。如果对每一 $s>0$，$\tilde{m}_s=\{m(sk): k\in \boldsymbol{Z}^n\}$ 为 $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ 乘子，且

$$B\triangleq \sup_{s>0}\|T_{\tilde{m}_s}\|_{H^p(\boldsymbol{T}^n)\to H^p(\boldsymbol{T}^n)}<\infty,$$

则 $m(x)$ 为 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 乘子，且

$$\|T_m\|_{H^p(\boldsymbol{R}^n)\to H^p(\boldsymbol{R}^n)}\leqslant B.$$

为证定理 6.1，先建立三个引理。

引理 6.1　设 $0<p\leqslant 1$, $G\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\hat{G}\subset B(0,1)$, 且 $\|G\|_p=1$. 如记

$$G_{s,p}(x)=s^{-n/p}G(x/s),\quad s>0,$$

则对任一三角多项式

$$f(x)=\sum_{0<|k|<l}a_k e^{2\pi i k\cdot x}\ (a_0=0),$$

有 $fG_{s,p}\in H^p(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\lim_{s\to\infty}\|fG_{s,p}\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}.$$

证明　由 H^p 空间的实变特征,不妨认为

$$\|fG_{s,p}\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>0}|[\varphi_t*(fG_{s,p})](x)|^p dx,$$

其中 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int\varphi(x)dx=1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset B(0,1),$$

以及

$$\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t).$$

显然,

$$0\leqslant\lim_{s\to\infty}\left\{\|fG_{s,p}\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}-\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|[\varphi_t*(fG_{s,p})](x)|^p dx\right\}$$

$$\leqslant\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>\sqrt{s}}|[\varphi_t*(fG_{s,p})](x)|^p dx.$$

不难看出,如果能够证明以下两式:

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|[\varphi_t*(fG_{s,p})](x)|^p dx=\|f\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)}\tag{6.1}$$

和

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>\sqrt{s}}|[\varphi_t*(fG_{s,p})](x)|^p dx=0,\tag{6.2}$$

则引理的结论成立, 还不难看出,为证(6.1)式, 只要证明以下两式:

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|G_{s,p}(x)|^p\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|(\varphi_t*f)(x)|^p dx=\|f\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)}\tag{6.3}$$

和

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|[\varphi_t*(fG_{s,p})](x)$$

$$-G_{s,p}(x)(\varphi_t*f)(x)|^p dx=0. \tag{6.4}$$

下面，先证(6.3)式。注意到

$$(\varphi_t*f)(x)=\sum_{|k|\leqslant t}a_k(f)\Phi_t(k)e^{2\pi ik\cdot x}$$

为一三角多项式，则

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|G_{s,p}(x)|^p\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|(\varphi_t*f)(x)|^p dx$$

$$=\lim_{s\to\infty}\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}\int_Q|G_{s,p}(x+q)|^p\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|(\varphi_t*f)(x)|^p dx,$$

其中 $Q=\{x\in\mathbb{R}^n;-1/2<x_j\leqslant 1/2,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$

为 $\mathbb{R}^n$ 中单位立方体。由于 $G\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，故必存在一与 $x\in Q$ 及 $s>0$ 无关的常数 C，使得

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}|G_{s,p}(x+q)|^p\leqslant C.$$

再注意到

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}|G_{s,p}(x+q)|^p=\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}s^{-n}\left|G\left(\frac{x+q}{s}\right)\right|^p$$

为积分

$$\int|G(x)|^p dx$$

的 Riemann 和，则

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}|G_{s,p}(x+q)|^p=\int_{\mathbb{R}^n}|G(x)|^p dx=1.$$

因此，由不等式

$$\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|(\varphi_t*f)(x)|^p=\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k(f)\Phi_t(k)e^{2\pi ik\cdot x}\right|^p$$

$$\leqslant\|\Phi\|_\infty^p\left(\sum_k|a_k|\right)^p,$$

并使用控制收敛定理便得

$$\lim_{s\to\infty}\int_Q\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}|G_{s,p}(x+q)|^p\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}|(\varphi_t*f)(x)|^p dx$$

$$=\int_Q \sup_{t>0}|(\varphi_t * f)(x)|^p dx = \|f\|_{H^p(T^n)}^p.$$

因此,(6.3)式成立。

为证(6.4)式,只要注意到

$$[\varphi_t*(fG_{s,p})](x) = \sum_{0<|k|\le l} a_k(f) e^{2\pi i k\cdot x}$$
$$\cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) e^{-2\pi i k\cdot y} G_{s,p}(x-y) dy,$$

则

$$[\varphi_t*(fG_{s,p})](x) - G_{s,p}(x)(\varphi_t*f)(x)$$
$$= \sum_{0<|k|\le l} a_k(f) e^{2\pi i k\cdot x} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) e^{-2\pi i k\cdot y}[G_{s,p}(x-y)$$
$$- G_{s,p}(x)]dy.$$

因此,(6.4)式等价于对每一$k\in Z^n$, 有

$$\lim_{s\to\infty} I_s = 0,$$

其中

$$I_s = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\le\sqrt{s}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) e^{-2\pi i k\cdot y}[G_{s,p}(x-y)\right.$$
$$\left.- G_{s,p}(x)]dy\right|^p dx.$$

现在,将 I_s 分成两部分

$$I_s = \int_{|x|\le 2s} \cdots dx + \int_{|x|>2s} \cdots dx \triangleq J_1 + J_2.$$

注意到 $\operatorname{supp}\varphi\subset B(0, 1)$, 则

$$J_1 \le \sup_{|x|\le 2s, |y|\le\sqrt{s}} |G_{s,p}(x-y) - G_{s,p}(x)|^p$$
$$\cdot \int_{|x|\le 2s} \sup_{t\le\sqrt{s}} \|\varphi_t\|_1^p dx$$
$$= C\|\varphi\|_1^p \sup_{|x|\le 2, |h|\le 1/\sqrt{s}} |G(x-h) - G(x)|^p \le Cs^{-p/2}.$$

上式最后一步使用了$|\nabla G|\le C$。对于 J_2, 有

$$J_2 \le \int_{|x|>2s} \sup_{t\le\sqrt{s}} \left\{\int_{|y|\le t} |\varphi_t(y)||\nabla G_{s,p}(x-\theta y)||y|dy\right\}^p dx$$

$$\leqslant\int_{|x|>2s}\Big\{\sup_{|y|\leqslant\sqrt{s}}|(\nabla G)_{s,p}(x-\theta y)|^p\Big\}$$

$$\cdot\sup_{t\leqslant\sqrt{s}}\Big\{\frac{1}{s}\int|\varphi_t(y)y|\mathrm{d}y\Big\}^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\|y\varphi(y)\|_1^p s^{-n-(p/2)}\int_{|x|>2s}\Big|\frac{x}{s}\Big|^{-n-1}\mathrm{d}x\leqslant Cs^{-p/2}.$$

上式倒数第二步使用了 $|\nabla G(x)|\leqslant C|x|^{-(n+1)/p}$。因此，

$$\lim_{s\to\infty}I_s=0。$$

从而，(6.4)式以及(6.1)式成立。

为证(6.2)式，只需证明：对任一 $k\in\mathbb{Z}^n(k\neq0)$，有

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>\sqrt{s}}|[\varphi_t*(G_{s,p}e^{2\pi ik\cdot})](x)|^p\mathrm{d}x=0。$$

注意到

$$\int_{|x|<2\sqrt{s}}\sup_{t<\sqrt{s}}|[\varphi_t*(G_{s,p}e^{2\pi ik\cdot})](x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|\varphi\|_1^p\|G_{s,p}\|_\infty^p\int_{|x|<2\sqrt{s}}\mathrm{d}x\leqslant Cs^{-p/2},$$

为证(6.2)式，也只需证明

$$\lim_{s\to\infty}\int_{|x|>2\sqrt{s}}\sup_{t>\sqrt{s}}|[\varphi_t*(G_{s,p}e^{2\pi ik\cdot})](x)|^p\mathrm{d}x=0。\tag{6.5}$$

如记

$$A_s(x)=[\varphi_t*(G_{s,p}e^{2\pi ik\cdot})](x),$$

且不妨设 $k_1\neq0$，则由分部积分得

$$A_s(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(y)G_{s,p}(x-y)e^{2\pi ik\cdot(x-y)}\mathrm{d}y$$

$$=e^{2\pi ik\cdot x}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)G_{s,p}(x-ty)e^{-2\pi itk\cdot y}\mathrm{d}y$$

$$=e^{2\pi ik\cdot x}(-2\pi itk_1)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)G_{s,p}(x-ty)$$

$$\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial y_1}e^{-2\pi itk\cdot y}\Big)\mathrm{d}y$$

$$= e^{2\pi i k\cdot x}(2\pi i t k_1)^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial}{\partial y_1}[\varphi(y)G_{s,p}(x-ty)]e^{-2\pi i t k\cdot y}dy$$

$$= e^{2\pi i k\cdot x}(2\pi i t k_1)^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\varphi(y)\right]G_{s,p}(x-ty)\right.$$

$$\left.-\frac{t}{s}\varphi(y)\left(\frac{\partial}{\partial y_1}G\right)_{s,p}(x-ty)\right\}e^{-2\pi i t k\cdot y}dy.$$

如使用不等式

$$|G(y)|+\left|\frac{\partial}{\partial y_1}G(y)\right|\leqslant C(1+|y|)^{-(n+1)/p},$$

则

$$|A_s(x)|\leqslant Ct^{-1}s^{-n/p}\int_{|y|<1}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\varphi(y)\right|\right.$$

$$\left.+\frac{t}{s}|\varphi(y)|\right\}\left(1+\frac{|x-ty|}{s}\right)^{-(n+1)/p}dy.$$

因此，当$\sqrt{s}<t<|x|/2$时，

$$|A_s(x)|\leqslant C(\|\nabla\varphi\|_1+\|\varphi\|_1)s^{n/p-1/2}\left(1+\frac{3}{2}\left|\frac{x}{s}\right|\right)^{-(n+1)/p}.$$

由此推出

$$\int_{|x|>2\sqrt{s}}\sup_{\sqrt{s}<t<|x|/2}|A_s(x)|^p dx\leqslant Cs^{-p/2}.$$

因此，余下只需证明

$$\lim_{s\to\infty}\int_{|x|>2\sqrt{s}}\sup_{t>|x|/2}|A_s(x)|^p dx=0.$$

为证上式，仍不妨设 $k_1\neq 0$。如重复使用分部积分法，可将 $A_s(x)$ 写成

$$A_s(x)=t^{-n}s^{n(1-1/p)}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\left(\frac{x-sy}{t}\right)G(y)e^{2\pi i s k\cdot y}dy$$

$$=t^{-n}s^{n(1-1/p)}(-2\pi i k_1 s)^{-N}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial^N}{\partial y_1^N}\left[\varphi\left(\frac{x-sy}{t}\right)G(y)\right]$$

$$\cdot e^{2\pi i s k\cdot y}dy$$

$$\triangleq t^{-n}s^{n(1-1/p)}(-2\pi i k_1 s)^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\left(-\frac{s}{t}\right)^j I_j,$$

其中

$$I_j=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{N-j}G(y)\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{j}\right.$$

$$\left.\cdot\varphi\left(\frac{x-sy}{t}\right)\right]e^{2\pi isk\cdot y}dy.$$

注意到 $G\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\hat{G}\subset B(0,1)$, 以及 $|k|\geqslant1$, 则对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, 以及 $s\geqslant1$, 有

$$(-2\pi i)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}y^\alpha[D^\beta G(y)]e^{2\pi isk\cdot y}dy$$
$$=(2\pi i)^{|\beta|}D^\alpha(u^\beta\hat{G}(u))|_{u=-sk}=0.$$

因此,如记 $P_l\left(\frac{x}{t},h\right)$为$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^j\varphi$ 在 $\frac{x}{t}$ 处的 l 阶关于 h的 Taylor 多项式,则

$$I_j=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi isk\cdot y}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{N-j}G(y)\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^j\varphi\left(\frac{x-sy}{t}\right)\right.$$
$$\left.-P_{N-j}\left(\frac{x}{t},\ \frac{sy}{t}\right)\right]dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi isk\cdot y}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{N-j}G(y)\right]$$
$$\cdot\sum_{|\alpha|=N-j}C_\alpha y^\alpha\left[D^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^j\varphi\right]\left(\frac{x-sy}{t}\right)\cdot\left(-\frac{s}{t}\right)^{N-j}dy.$$

因此,

$$|A_s(x)|\leqslant(2\pi sk_1)^{-N}t^{-n}s^{n(1-1/p)}\left(\frac{s}{t}\right)^N\sum_{|\alpha|=N}\|D^\alpha\varphi\|_\infty$$
$$\cdot\sum_{j=0}^N\binom{N}{j}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{N-j}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{N-j}G(y)\right|dy$$
$$\leqslant Ct^{-N-n}\leqslant C|x|^{-n-N}.$$

如取充分大的 N, 使得 $N+n\geqslant(n+1)/p$, 则

$$\int_{|x|>2\sqrt{s}}\sup_{t>|x|/2}|A_s(x)|^pdx\leqslant C\int_{|x|>2\sqrt{s}}|x|^{-n-1}dx\leqslant Cs^{-1/2}.$$

因此,

$$\lim_{s\to\infty}\int_{|x|>2\sqrt{s}}\sup_{t>|x|/2}|A_s(x)|^pdx=0.$$

到此,(6.5)式成立,引理证毕。

引理 6.2 设 $\frac{n-1}{n-1+l}<p\leqslant 1$, $l\in\mathbb{N}$, 以及 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对任一多重指标 $J=\{j_1, \cdots, j_l\}$, $0\leqslant j_i\leqslant n$ $(1\leqslant i\leqslant l)$, 有

$$R_J f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n),$$

且存在一仅与 n、p 及 l 有关的常数 C, 使得

$$C^{-1}\sum_J\|R_J f\|_p\leqslant\|f\|_{H^p}\leqslant C\sum_J\|R_J f\|_p,$$

其中 $R_J f=R_{j_1}\cdots R_{j_l}f$; 当 $j_i\neq 0$ 时, $R_{j_i}f$ 为 f 的 Riesz 变换; 当 $j_i=0$ 时, R_{j_i} 为恒等变换。$R_J f$ 称为 f 关于多重指标 J 的 Riesz 变换。

证明 由于 Riesz 变换在 H^p 空间上是有界的, 故引理结论中左端不等式成立。为证右端不等式成立, 置

$$U_J(x, t)=(P_t*R_J f)(x),$$

其中 P 为 Poisson 核, 由 Stein-Weiss 的 H^p 空间理论 (见 [SW2]), 不难证明 $F(x, t)=(U_J(x, t))_J$ 满足广义 Cauchy-Riemann 方程(见第 1 章(1.1)式), 且 f 为 $F(x, t)$的第一个分量之边值。此外, $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $F(x, t)\in H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$。因此, 下面只需证明: 当 $R_J f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$时, 有

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|F(x, t)|^p dx\leqslant C\sum_J\|R_J f\|_p^p. \tag{6.6}$$

如记

$$p_l=\frac{n-1}{n-1+l},$$

则 A. P. Calderón, A. Zygmund [CZ1] 已指出 $|F(x, t)|^{p_l}$ 为次调和的。因此, 如取 $S(x, t)=|F(x, t)|^{p_l}$, 以及 $q=2/p_l$, 并使用关于调和函数控制的一个定理(见[SW2]), 则可知存在一 $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$S(x, t)\leqslant(P_t*g)(x),$$

以及

$$\|g\|_q\leqslant\sup_{t>0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|S(x, t)|^q dx\right)^{1/q}.$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S(x, t)|^q \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, t)|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_J |(P_t * R_j f)(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \sum_J \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{P}_t(x) \cdot \widehat{R_j f}(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \sum_J \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi t|x|} |\widehat{R_j f}(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

便不难看出

$$\|g\|_q^q \leqslant \sum_J \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{R_j f}(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, 0)|^2 \mathrm{d}x.$$

此即

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{2/p_1} \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, 0)|^2 \mathrm{d}x,$$

另一方面，由不等式

$$|F(x, t)|^{p_1} = S(x, t) \leqslant (P_t * g)(x)$$

可得

$$|F(x, 0)|^{p_1} \leqslant g(x).$$

因此，

$$|F(x, 0)|^2 \leqslant \{g(x)\}^{2/p_1}.$$

由此推出

$$\{g(x)\}^{2/p_1} = |F(x, 0)|^2.$$

注意到

$$|F(x, 0)|^p = (\sum_J |R_j f(x)|^2)^{p/2}$$

$$\leqslant \sum_J |R_j f(x)|^p,$$

以及当 $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ 时，有 $R_j f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$，则得 $F(x, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$。因此，当 $p > p_1$ 时，由 Poisson 积分的性质可得

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,t)|^p\mathrm{d}x=\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|S(x,t)|^{p/p_1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|(P_t*g)(x)|^{p/p_1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^{p/p_1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,0)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_j\int_{\mathbb{R}^n}|R_jf(x)|^p\mathrm{d}x.$$

因此，(6.6)式成立，引理证毕。

注 6.1 对于周期情形，引理的结论同样成立。

最后，还需要一个关于有限阶指数型整函数的引理，它是属于 Plancherel-Polya 的，其证明可在 R. P. Boas [Bo1] 或 M. Frazier, B. Jawerth [FJ1] 中找到。

引理 6.3 设 $0<p<\infty$, $\nu\in\mathbb{Z}$, $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$，以及 $\operatorname{supp}\hat{g}\subset B(0,2^{\nu+1})$。如记

$$Q_{\nu,k}=\{x\in\mathbb{R}^n: k_j2^\nu<x_j\leqslant(k_j+1)2^\nu,\ 1\leqslant j\leqslant n\},\ k\in\mathbb{Z}^n,$$

则以下两式成立：

$$2^{-\nu n}\sup_{z\in Q_{\nu,k}}|g(z)|^p\leqslant C\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}(1+|l|)^{-n-1}\int_{Q_{\nu,k+l}}|g(x)|^p\mathrm{d}x,$$

以及

$$2^{-\nu n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sup_{z\in Q_{\nu,k}}|g(z)|^p\leqslant C\|g\|_p^p,$$

其中常数 C 仅与 n、p 有关。

定理 6.1 的证明 由于三角多项式全体构成 $H^p(\mathbb{T}^n)$ 的一个稠子集，故只需证明：对任一三角多项式 f，有

$$\|T_{\tilde{m}}f\|_{H^p(\mathbb{T}^n)}\leqslant2^{1/p}\|m\|_{M_p}\|f\|_{H^p(\mathbb{T}^n)},\tag{6.7}$$

其中

$$\|m\|_{M_p}=\|T_m\|_{H^p(\mathbb{R}^n)\to H^p(\mathbb{R}^n)}.$$

如写着

$$f(x)=\sum_{|k|<L}a_ke^{2\pi ik\cdot x}$$

$$= a_0 + \sum_{0<|k|\leq l} a_k e^{2\pi i k\cdot x} \triangleq a_0 + f_0(x),$$

并能证明

$$\|T_{\tilde{m}} f_0\|_{H^p(\mathbf{T}^n)} \leq \|m\|_{M^p} \|f_0\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}, \tag{6.8}$$

则由 $|a_0| \leq \|f\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}$ 和 $m(0)=0$ 便推出(6.7)式:

$$\begin{aligned}\|T_{\tilde{m}} f\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)} &= \|T_{\tilde{m}} f_0\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)} \\ &\leq \|m\|^p_{M^p} \|f_0\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)} \\ &\leq 2\|m\|^p_{M^p} \|f\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)}.\end{aligned}$$

注意到由引理 6.1, 得

$$\begin{aligned}\|T_{\tilde{m}} f_0\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)} &= \lim_{s\to\infty} \|G_{s,p}(\cdot)(T_{\tilde{m}} f_0)(\cdot)\|^p_{H^p(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq \lim_{s\to\infty} \|T_m(f_0 G_{s,p})(\cdot)\|^p_{H^p(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \lim_{s\to\infty} \|T_m(f_0 G_{s,p})(\cdot) \\ &\quad - G_{s,p}(\cdot)(T_{\tilde{m}} f_0)(\cdot)\|^p_{H^p(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}$$

因此, 如能证明

$$\lim_{s\to\infty} \|T_m(f_0 G_{s,p})(\cdot) - G_{s,p}(\cdot)(T_{\tilde{m}} f_0)(\cdot)\|_{H^p(\mathbf{R}^n)} = 0, \tag{6.9}$$

则由以上两式和引理 6.1 便推出(6.8)式:

$$\begin{aligned}\|T_{\tilde{m}} f_0\|_{H^p(\mathbf{T}^n)} &\leq \lim_{s\to\infty} \|m\|_{M^p} \|f_0 G_{s,p}\|_{H^p(\mathbf{R}^n)} \\ &= \|m\|_{M^p} \|f_0\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}.\end{aligned}$$

以下, 转向(6.9)式的证明. 由等式

$$[T_m(f_0 G_{s,p})]^\wedge(x) = \sum_{0<|k|\leq l} a_k m(x) \hat{G}_{s,p}(x-k)$$

和

$$[G_{s,p}(T_{\tilde{m}} f_0)]^\wedge(x) = \sum_{0<|k|\leq l} a_k m(k) \hat{G}_{s,p}(x-k),$$

不难看出: 为证(6.9)式, 只需证明

$$\lim_{s\to\infty} \|\{[m(\cdot) - m(k)]\hat{G}_{s,p}(\cdot - k)\}^\vee\|_{H^p(\mathbf{R}^n)} = 0,$$

$$k \in \mathbf{Z}^n, \ k \neq 0,$$

其中记号 $\vee$ 表示逆 Fourier 变换. 为简便之计, 记

$$F_s(x) = \{[m(\cdot) - m(k)]\hat{G}_{s,p}(\cdot - k)\}^\vee(x).$$

由引理 6.2 以及以上两式可知，为证(6.9)式，也只需证明

$$\lim_{s\to\infty}\|R_J F_s\|_p = 0,\ \forall J=\{j_1,\ \cdots,\ j_l\},\ 0\leqslant j_i\leqslant n(1\leqslant i\leqslant l). \tag{6.10}$$

其中 R_J 为关于多重指标 J 的 Riesz 变换。如记

$$m_{R_J}(u)=(-2\pi i)^l(u_{j_1}/|u|)\cdots(u_{j_l}/|u|),$$

并注意到

$$\operatorname{supp}\ \hat{G}_{s,p}\subset\{u:|u|\leqslant 1/s\},$$

则

$$\begin{aligned}|R_J F_s(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} m_{R_J}(u)[m(u)-m(k)]\hat{G}_{s,p}(u-k)e^{2\pi i x\cdot u}du\right| \\ &\leqslant C\sup_{|h|<1/s}|m(k+h)-m(k)|\,\|\hat{G}_{s,p}\|_\infty\int_{|u-k|\leqslant 1/s}du \\ &\leqslant Cs^{-n/p}\sup_{|h|<1/s}|m(k+h)-m(k)|.\end{aligned}$$

由定理 2.1 可知，

$$m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}).$$

因此，如记

$$r_s=\{\sup_{|h|<1/s}|m(k+h)-m(k)|\}^{-(n+1/p)},$$

则不难看出

$$\lim_{s\to\infty} r_s=\infty.$$

从而，由上面关于 $R_J F_s(x)$ 的估计，得

$$\begin{aligned}\int_{sr_sQ}|R_J F_s(x)|^p dx &\leqslant Cs^{-n}r_s^{-n-1}|sr_sQ| \\ &= Cr_s^{-1}\to 0,\ \text{当}\ s\to\infty,\end{aligned}$$

其中 CQ 表示单位立方体 Q 的 C 倍同心扩张。因此，余下只需证明

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\setminus sr_sQ}|R_J F_s(x)|^p dx=0. \tag{6.11}$$

取一 $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，满足

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\ |x|\leqslant 1/3,\\ 0, & \text{当}\ |x|\geqslant 2/3.\end{cases}$$

由于 $m(u)-m(k)$ 为 $H^p(R^n)$ 乘子，则

$$b(x)\triangleq\{[m(\cdot)-m(k)]\psi(\cdot)\}^\vee(x)\in H^p(R^n).$$

从而，$R_jb\in H^p(R^n)$。当 $s\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}R_jF_s(x)&=\{[m(\cdot)-m(k)]\psi(\cdot-k)\hat{G}_{s,p}(\cdot-k)\}^\vee(x)\\&=[R_jb*(G_{s,p}e^{2\pi ik\cdot})](x)\\&=\int_{R^n}R_jb(x-y)G_{s,p}(y)e^{2\pi ik\cdot y}dy.\end{aligned}$$

对任一 $q\in\mathbb{Z}^n$，$\nu\in\mathbb{Z}$，如记

$$Q_{\nu,q}=\{x\in R^n:2^\nu q_j<x_j\leqslant 2^\nu(q_j+1),\ 1\leqslant j\leqslant n\},$$

则

$$|R_jF_s(x)|\leqslant\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{s,p}(y)|\cdot\sup_{y\in Q_{0,q}}|R_jb(x-y)|.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_{R^n\setminus sr_sQ}|R_jF_s(x)|^pdx\\&\leqslant\sum_{\substack{v\in\mathbb{Z}^n\\v\notin sr_sQ}}\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}\Big(\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{s,p}(y)|^p\Big)\Big(\sup_{x\in Q_{0,v}}\sup_{y\in Q_{0,q}}|R_jb(x-y)|^p\Big)\\&\leqslant\sum_{|q|\leqslant s\sqrt{r_s}}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{s,p}(y)|^p\\&\quad\cdot\sum_{v\notin sr_sQ}\sup_{x\in Q_{0,v}}\sup_{y\in Q_{0,q}}|R_jb(x-y)|^p\\&\quad+\sum_{|q|>s\sqrt{r_s}}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{s,p}(y)|^p\\&\quad\cdot\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}\sup_{x\in Q_{0,v}}\sup_{y\in Q_{0,q}}|R_jb(x-y)|^p\triangleq\Sigma_1+\Sigma_2.\end{aligned}$$

注意到当 $x\in Q_{0,v}$ 以及 $y\in Q_{0,q}$ 时，

$$v_j-q_j-1<x_j-y_j\leqslant v_j-q_j+1\quad(1\leqslant j\leqslant n).$$

不妨设 v_j-q_j-1 为偶数（否则对 x 作第 j 个分量的单位平移），并记 $v_j-q_j-1=2w_j$，则 $x-y\in Q_{1,w}$。由此推出

$$\Sigma_2\leqslant\sum_{|q|>s\sqrt{r_s}}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{s,p}(y)|^p\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\sup_{u\in Q_{1,w}}|R_jb(u)|^p.$$

对上式右端使用引理 6.3，便得

$$\begin{aligned}\Sigma_2&\leqslant C\|R_jb\|_p^p\sum_{|q|>s\sqrt{r_s}}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}(1+|l|)^{-n-1}\int_{Q_{0,q+l}}|G_{s,p}(y)|^pdy\\&\leqslant C\|b\|_{H^p}^p\Big(\sum_{|l|\leqslant s\sqrt{r_s}/2}+\sum_{|l|>s\sqrt{r_s}/2}\Big)(1+|l|)^{-n-1}\end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{|q|>s\sqrt{r_s}} \int_{Q_{s,q+l}} |G_{s,p}(y)|^p dy \triangleq C\|b\|_{H^p}^p(\Sigma_{21}+\Sigma_{22}).$$

注意到当 $|q|>s\sqrt{r_s}$，以及 $|l|\leqslant s\sqrt{r_s}/2$ 时，$|q+l|>s\sqrt{r_s}/2$，则

$$\Sigma_{21}\leqslant \sum_{|l|\leqslant s\sqrt{r_s}/2} (1+|l|)^{-n-1} \sum_{|q|>s\sqrt{r_s}/2} \int_{Q_{s,q}} |G_{s,p}(y)|^p dy$$

$$\leqslant \sum_{l\in \mathbf{Z}^n} (1+|l|)^{-n-1} \int_{|y|>s\sqrt{r_s}/2} |G_{s,p}(y)|^p dy.$$

因此，

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \Sigma_{21}=0.$$

由引理 6.3，并注意到 $\|G_{s,p}\|_p=\|G\|_p=1$，使得

$$\Sigma_{22}\leqslant C \sum_{|l|>s\sqrt{r_s}/2} (1+|l|)^{-n-1},$$

由此推出

$$\lim_{s\to\infty} \Sigma_{22}=0.$$

因此，

$$\lim_{s\to\infty} \Sigma_2=0.$$

为估计 Σ_1，注意到当

$$v\notin sr_sQ, \quad |q|\leqslant s\sqrt{r_s},$$

以及 s 充分大时，必有

$$w\notin \frac{1}{2} sr_sQ,$$

其中 w 同前面一样由 v、q 所确定。因此，

$$\Sigma_1\leqslant \sum_{|q|\leqslant s\sqrt{r_s}} \sup_{y\in Q_{s,q}} |G_{s,p}(y)|^p \sum_{w\notin \frac{1}{2}sr_sQ} \sup_{u\in Q_{1,w}} |R_jb(u)|^p.$$

从而，由引理 6.3 便得

$$\Sigma_1\leqslant C\|G_{s,p}\|_p^p \sum_{w\notin \frac{1}{2}sr_sQ} \sum_{l\in \mathbf{Z}^n} (1+|l|)^{-n-1} \int_{Q_{1,w+l}} |R_jb(u)|^p du.$$

如对上式右端使用类似于对 Σ_2 的估计方法，则同样可得

$$\lim_{s\to\infty}\Sigma_1=0.$$

因此，(6.11) 式成立，定理证毕。

为证定理 6.2，需要建立两个引理。

引理 6.4　设 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$, $0<p\leqslant 1$.

(i) 若 $\tilde{f}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)e^{2\pi ik\cdot x}$, 则 $\tilde{f}\in H^p(\mathbb{T}^n)$, 且

$$\|\tilde{f}\|_{H^p(\mathbb{T}^n)}\leqslant\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)},$$

(ii) 若 $f_{t,p}(x)=t^{-n/p}f(x/t)$, $t>0$, 则

$$\|f_{t,p}\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)},$$

以及

$$\lim_{t\to 0+}\|\tilde{f}_{t,p}\|_{H^p(\mathbb{T}^n)}=\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中

$$\tilde{f}_{t,p}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_{t,p}(k)e^{2\pi ik\cdot x}.$$

证明　由定理 1.1 可知 $\tilde{f}\in\mathscr{S}'(\mathbb{T}^n)$. 其次, 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1,$$

并记
$$\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t).$$
不难看出: 对任一 $t>0$, $\varphi_t*f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 以及

$$(\varphi_t*f)^\wedge(x)=\hat{\varphi}_t(x)\hat{f}(x)\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

因此, 由 Poisson 求和公式, 得

$$\begin{aligned}(\varphi_t*\tilde{f})(x)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(tk)f(k)e^{2\pi ik\cdot x}\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\varphi_t*f)^\wedge(k)e^{2\pi ik\cdot x}\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\varphi_t*f)(x+k).\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n}\sup_{t>0}|(\varphi_t*\tilde{f})(x)|^p\mathrm{d}x&\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\sup_{t>0}|(\varphi_t*f)(x+k)|^p\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>0}|(\varphi_t*f)(x)|^p\mathrm{d}x\\&=\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

此即(i)成立。

其次, 注意到等式

$$\|f_{t,p}\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

是明显成立的. 同上面一样, 可得

$$(\varphi_y * \tilde{f}_{t,p})(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\varphi_{y/t}*f)_{t,p}(x+k)_{\bullet}$$

由此推出

$$\left|\sup_{y>0}|(\varphi_y*\tilde{f}_{t,p})(x)|^p-\sup_{y>0}|(\varphi_{y/t}*f)_{t,p}(x)|^p\right|$$
$$\leqslant\sum_{k\neq 0}\sup_{y>0}|(\varphi_{y/t}*f)_{t,p}(x+k)|^p.$$

但

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbf{T}^n}\sum_{k\neq 0}\sup_{y>0}|(\varphi_{y/t}*f)_{t,p}(x+k)|^p\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n\setminus t^{-1}Q}\sup_{y>0}|(\varphi_y*f)(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

由以上两式便得

$$\lim_{t\to 0+}\|\tilde{f}_{t,p}\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)}=\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbf{T}^n}\sup_{y>0}|(\varphi_{y/t}*f)_{t,p}(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{t\to 0+}\int_{t^{-1}Q}\sup_{y>0}|(\varphi_y*f)(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$=\|f\|^p_{H^p(\mathbf{R}^n)}.$$

因此，(ii) 成立，引理证毕。

引理 6.5 设 $0<p\leqslant 1$，$f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，$\hat{f}\in C_c(\mathbb{R}^n)$，以及

$$\hat{f}(0)=0.$$

若

$$\lim_{t\to 0+}\inf\|\tilde{f}_{t,p}\|_{H^p(\mathbf{R}^n)}<\infty,$$

则 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f\|_{H^p(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\lim_{t\to 0+}\inf\|\tilde{f}_{t,p}\|_{H^p(\mathbf{R}^n)},$$

其中 C 仅与 n、p 有关，而记号 $\tilde{f}_{t,p}$ 如引理 6.4 中所述。

证明 由条件 $\hat{f}\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上为一有界的连续函数，且 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$。因此，

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(u)e^{2\pi i u\cdot x}\mathrm{d}u$$
$$=\lim_{t\to 0+}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(tk)e^{2\pi i t k\cdot x}$$
$$=\lim_{t\to 0+}t^n\tilde{f}_t(tx),$$

其中的和式为前面积分的 Riemann 和，且 $f_t(x)=t^{-n}f(x/t)$。

其次，由 $\hat{f}(0)=0$，可知 $\widehat{R_J f}\in C_C(\mathbb{R}^n)$。因此，重复上面的方法得

$$R_J f(x)=\lim_{t\to 0+} t^n(\widetilde{R_J f})_t(tx)$$
$$=\lim_{t\to 0+} t^n(\widetilde{R}_J\widetilde{f}_t)(tx)。$$

由此推出：对任一 $x\in R^n$，

$$|R_J f(x)|^p=\lim_{t\to 0+} t^{np}|(\widetilde{R}_J\widetilde{f}_t)(tx)|^p\mathscr{X}_Q(tx),$$

以上两式中出现的 $\widetilde{R}_J$ 为关于多重指标 J 的周期 Riesz 变换。因此，由 Fatou 引理，引理 6.2，以及注 6.1，便得

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\sum_J\|R_J f\|_p$$
$$=C\sum_J\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{t\to 0+} t^{np}|(\widetilde{R}_J\widetilde{f}_t)(tx)|^p\mathscr{X}_Q(tx)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant C\liminf_{t\to 0+}\sum_J\left\{t^{np-n}\int_Q|(\widetilde{R}_J\widetilde{f}_t)(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$=C\liminf_{t\to 0+}\sum_J\|\widetilde{R}_J\widetilde{f}_{t,p}\|_p$$
$$\leqslant C\liminf_{t\to 0+}\|\widetilde{f}_{t,p}\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}。$$

引理证毕。

定理 6.2 的证明 由于 $H^p(R^n)$ 中其 Fourier 变换具有紧支集的函数全体构成 $H^p(R^n)$ 的稠子集，故不妨对这样的 f($f\in H^p(R^n)$，且 $\hat{f}$ 具有紧支集)来证明不等式

$$\|T_m f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中

$$C=\sup_{t>0}\|T_{\widetilde{m}_t}\|_{H^p(\mathbf{T}^n)\to H^p(\mathbf{T}^n)}。$$

为证上式，由引理 6.5，也只需证明

$$\liminf_{t\to 0+}\|[(T_m f)_{t,p}]^\sim\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}\leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}。\tag{6.12}$$

但(6.12)式是定理的条件和引理 6.4 的直接结果：

$$\liminf_{t\to 0+}\|[(T_m f)_{t,p}]^\sim\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\inf\left\|\sum_{k\in Z^n} t^{n-n/p} m(tk)\hat{f}(tk)e^{2\pi ikx}\right\|_{H^p(R^n)}$$
$$\leqslant C\lim_{t\to 0+}\inf\|\tilde{f}_{t,p}\|_{H^p(T^n)}=C\|f\|_{H^p(R^n)}.$$

到此，定理证毕。

作为 H^p 乘子转移定理的一个应用，以下来建立 Bochner-Riesz 平均在 $H^p(T^n)$上的有界性。设

$$f\in H^p(T^n)\cap L^2(T^n).$$

f 在 T^n 上的 δ 阶 Bochner-Riesz 平均被定义为

$$(S_{1/\varepsilon}^{\delta}f)(x)=\sum_{|\nu|<1/\varepsilon} C_\nu(f)(1-|\varepsilon\nu|^2)^{\delta}e^{i\nu\cdot x},$$

其中 $C_\nu(f)$为 f 的 Fourier 系数。以下设 $0<p\leqslant 1$，以及

$$\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}.$$

如置

$$m_\varepsilon(x)=(1-|\varepsilon x|^2)_+^{\delta}-1,\ \varepsilon>0,$$

以及由等式

$$(T_{m_\varepsilon}f)^\wedge(x)=m_\varepsilon(x)\hat{f}(x),\ f\in H^p(R^n)\cap L^2(R^n),$$

确定一乘子算子 T_{m_ε}，则由定理 5.4 得知 $m_\varepsilon(x)$为 $H^p(R^n)$ 乘子，注意到 $m_\varepsilon(0)=0$，由定理 6.1 便可知

$$\tilde{m}_\varepsilon=\{m_\varepsilon(\nu);\nu\in Z^n\}$$

为$H^p(T^n)$乘子。由此不难推得

推论 6.1 设 $0<p\leqslant 1$，以及

$$\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2},$$

则存在一与 ε、f 无关的常数 C，使得

$$\|S_{1/\varepsilon}^{\delta}f\|_{H^p(T^n)}\leqslant C\|f\|_{H^p(T^n)}.$$

本节的剩下部分将研究由一族乘子算子所确定的极大算子的转移问题。

定义 6.2 设 $m\in L^\infty(R^n)$。对任一正数 $s>0$，定义算子

$$T_s;\quad (T_sf)^\wedge(u)=m(su)\hat{f}(u),$$
$$f\in L^2(R^n)\cap H^p(R^n),$$

以及

$$\tilde{T}_s: (\tilde{T}_s f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} m(sk) a_k(f) e^{2\pi i k\cdot x},$$

$$f\in L^2(T^n)\cap H^p(T^n).$$

(i) 若 $(T^* f)(x) = \sup_{s>0}|(T_s f)(x)|$ 可以扩张为 $H^p(T^n)$ 到 $L^p(R^n)$ 中的有界算子，则称 m 为 $H^p(R^n)$ 上的一个极大乘子；

(ii) 若 $(\tilde{T}^* f)(x) = \sup_{s>0}|(\tilde{T}_s f)(x)|$ 可以扩张为 $H^p(T^n)$ 到 $L^p(T^n)$ 中的有界算子，则称 m 为 $H^p(T^n)$ 上的一个极大乘子。

下面的定理揭示了 $H^p(R^n)$ 上极大乘子同 $H^p(T^n)$ 上极大乘子之间的转移关系。

定理 6.3 设 $0<p\leqslant 1$，以及 $m\in L^\infty(R^n)$。

i) 若 $m\in C(R^n)$，$\lim_{|x|\to\infty} m(x) = a \neq \infty$，以及 m 为 $H^p(R^n)$ 上极大乘子，则 m 也是 $H^p(T^n)$ 上极大乘子；

ii) 若 $m\in C(R^n\setminus\{0\})$，以及 m 为 $H^p(T^n)$ 上极大乘子，则 m 也是 $H^p(R^n)$ 上极大乘子。

为证定理，需要建立一个辅助引理。

引理 6.6 设 $0<p<\infty$，$G\in\mathscr{S}(R^n)$，

$$\operatorname{supp}\hat{G}\subset\{u\in R^n: |u|\leqslant 1\},$$

且 $\|G\|_p = 1$，如记

$$G_{s,p}(x) = s^{-n/p}G(x/s),$$

则对任一 $f\in L^p(T^n)$，有

$$\lim_{s\to\infty}\|fG_{s,p}\|_{L^p(R^n)} = \|f\|_{L^p(T^n)}.$$

证明 如同前面，可设 $f(x)$ 对每一变元的周期为 1。从而，对任一 $k\in\mathbb{Z}^n$，有 $f(x+k) = f(x)$。因此，

$$\lim_{s\to\infty}\|fG_{s,p}\|^p_{L^p(R^n)} = \lim_{s\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{T^n}|f(x)|^p|G_{s,p}(x+k)|^p dx$$

$$= \lim_{s\to\infty}\int_{T^n}|f(x)|^p\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|G_{s,p}(x+k)|^p\Big)dx.$$

注意到引理 6.1 的证明中已得到

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|G_{s,p}(x+k)|^p = \|G\|_p^p = 1.$$

因此，引理的结论成立，证毕。

定理 6.3 的证明 i) 设m为 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上极大乘子。由于三角多项式全体在$L^p(T^n)$和 $H^p(T^n)$中稠密，故只需证明：对任一三角多项式

$$f(x)=\sum_{|k|\leq l}a_k e^{2\pi i k\cdot x},$$

有

$$\|\widetilde{T}^* f\|_{L^p(\mathbf{T})^n}\leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}. \tag{6.13}$$

如注意到

$$|a_0|=\left|\int_{\mathbf{T}^n}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_{H^p(\mathbf{T}^n)},$$

以及

$$\widetilde{T}^*a_0=|m(0)a_0|\leqslant|m(0)|\|f\|_{H^p(\mathbf{T}^n)},$$

则只需证明(6.13)式对任一常数项为零的三角多项式f成立。由引理 6.6，得

$$\begin{aligned}\int_{T^n}[\widetilde{T}^*f(x)]^p\mathrm{d}x&=\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\sup_{s>0}|(\widetilde{T}_sf)(x)|^p\cdot|G_{t,p}(x)|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\sup_{s>0}|T_s(fG_{t,p})(x)\\&\quad-(\widetilde{T}_sf)(x)G_{t,p}(x)|^p\mathrm{d}x\\&\quad+\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\sup_{s>0}|T_s(fG_{t,p})(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

如使用引理 6.1，并注意到m为$H^p(\mathbb{R}^n)$上极大乘子，则得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\sup_{s>0}|T_s(fG_{t,p})(x)|^p\mathrm{d}x&=\lim_{t\to\infty}\|T^*(fG_{t,p})\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^p\\&\leqslant C\lim_{t\to\infty}\|fG_{t,p}\|_{H^p(\mathbf{R}^n)}^p\\&=C\|f\|_{H^p(\mathbf{T}^n)}^p.\end{aligned}$$

因此，为证(6.13)式，只需证明关系式

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\sup_{s>0}|T_s(fG_{t,p})(x)-(\widetilde{T}_sf)(x)G_{t,p}(x)|^p\mathrm{d}x=0 \tag{6.14}$$

对任一常数项为零的三角多项式f成立，等价地对任一

$$f = e^{2\pi i k \cdot x} (k \in \mathbb{Z}^n, \ k \neq 0)$$

成立即可。

为简便之计，记

$$F_t(x) = \sup_{s>0} |T_s(G_{t,p} e^{2\pi i k \cdot})(x) - m(sk) e^{2\pi i k \cdot x} G_{t,p}(x)|,$$

则

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \sup_{s>0} \left| \int_{\mathbf{R}^n} [m(su) - m(sk)] \hat{G}_{t,p}(u-k) e^{2\pi i u \cdot x} du \right| \\ &\leqslant C t^{n(1-1/p)} \sup_{s>0} \int_{|h|<1/t} |m(sk+sh) - m(sk)| dh \\ &\triangleq C t^{-n/p} \varepsilon(t), \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon(t) = \sup_{s>0} t^n \int_{|h|<1/t} |m(sk+sh) - m(sk)| dh.$$

使用定理中 i) 的条件，不难验证，对每一 $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0.$$

如记

$$r(t) = \varepsilon(t)^{-(n+1)/p},$$

$$Q = \{x \in \mathbf{R}^n: \ -1/2 < x_j \leqslant 1/2, \ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

以及 CQ 为 Q 的 C 倍同心扩张，则

$$\begin{aligned} \int_{tr(t)Q} [F_t(x)]^p dx &\leqslant C t^{-n} r(t)^{-(n+1)} |tr(t) Q| \\ &\leqslant C/r(t) \to 0, \ \text{当} \ t \to \infty. \end{aligned}$$

因此，为证 (6.14) 式对任一 $f = e^{2\pi i k \cdot x}$ 成立 ($k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$)，只需证明

$$\int_{[tr(t)Q]^c} [F_t(x)]^p dx \to 0, \ \text{当} \ t \to \infty. \tag{6.15}$$

又注意到

$$F_t(x) \leqslant \sup_{s>0} |T_s(G_{t,p} e^{2\pi i k \cdot})(x)| + \|m\|_\infty |G_{t,p}(x)|,$$

以及

$$\int_{[tr(t)Q]^c} |G_{t,p}(x)|^p dx = \int_{[r(t)Q]^c} |G(x)|^p dx \to 0, \ \text{当} \ t \to \infty.$$

因此，为证 (6.15) 式，也只需证明

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[tr(t)Q]^c}\sup_{s>0}|T_s(G_{t,p}e^{2\pi ik\cdot})(x)|^p\mathrm{d}x=0. \tag{6.16}$$

取一$\psi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}\subset\{u\in\boldsymbol{R}^n:|u-k|\leqslant 1/2\},$$

以及

$$\hat{\psi}(u)=1,\ 当\ |u-k|\leqslant 1/4.$$

利用卷积的 Fourier 变换性质，不难验证等式

$$T_s(G_{t,p}e^{2\pi ik\cdot})(x)=[(T_s\psi)*(G_{t,p}e^{2\pi ik\cdot})](x),\ 当\ t\geqslant 4.$$

因此，如记

$$Q_{\nu,q}=\{x\in\boldsymbol{R}^n:q_j2^\nu<x_j\leqslant(q_j+1)2^\nu,\ 1\leqslant j\leqslant n\},$$

$$q\in\mathbb{Z}^n,\ \nu\in\mathbb{Z},$$

则当 $t\geqslant 4$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_{[tr(t)Q]^c}[T^*(G_{t,p}e^{2\pi ik\cdot})(x)]^p\mathrm{d}x\\
\leqslant&\sum_{\nu\notin tr(t)Q}\sup_{x\in Q_{0,\nu}}[T^*(G_{t,p}e^{2\pi ik\cdot})(x)]^p\\
=&\sum_{\nu\notin tr(t)Q}\sup_{x\in Q_{0,\nu}}\{\sup_{s>0}[(T_s\psi)*(G_{t,p}e^{2\pi ik\cdot})](x)\}^p\\
\leqslant&\sum_{\nu\notin tr(t)Q}\sup_{x\in Q_{0,\nu}}\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}\sup_{s>0}\Big(\sup_{y\in Q_{0,q}}|(T_s\psi)(x-y)|^p\Big)\\
&\cdot\Big(\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{t,p}(y)|^p\Big)\\
=&\sum_{q\in\mathbb{Z}^n}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{t,p}(y)|^p\sum_{\nu\notin tr(t)Q}\sup_{s>0}\sup_{y\in Q_{1,\nu}}|(T_s\psi)(y)|^p\\
\leqslant&\sum_{q\in t\sqrt{r(t)}Q}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{t,p}(y)|^p\sum_{\nu\notin t\sqrt{r(t)}Q}\sup_{s>0}\sup_{y\in Q_{1,\nu}}|(T_s\psi)(y)|^p\\
&+\sum_{q\notin t\sqrt{r(t)}Q}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{t,p}(y)|^p\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\sup_{s>0}\sup_{y\in Q_{1,\nu}}|(T_s\psi)(y)|^p\\
\triangleq&\Sigma_1+\Sigma_2.
\end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{supp}\widehat{T_s\psi}\subset B(0,1/2)$，由引理 6.3 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\sup_{s>0}\sup_{y\in Q_{1,\nu}}|(T_s\psi)(y)|^p\\
\leqslant&C\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\sup_{s>0}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}(1+|\tau|)^{-n-1}\int_{Q_{1,\nu+\tau}}|(T_s\psi)(y)|^p\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}(1+|\tau|)^{-n-1}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}\int_{Q_{1,v+\tau}}[(T^*\psi)(y)]^p\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}[(T^*\psi)(y)]^p\mathrm{d}y\leqslant C\|\psi\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}.$$

因此,

$$\Sigma_2\leqslant C\sum_{q\notin t\sqrt{r(t)}Q}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{t,p}(y)|^p.$$

注意到 $\operatorname{supp}\hat{G}_{t,p}\subset B(0,1/t)\subset B(0,1/4)$, 仍使用引理 6.3 于上式右端, 可得

$$\Sigma_2\leqslant C\sum_{q\notin t\sqrt{r(t)}Q}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}(1+|\tau|)^{-n-1}\int_{Q_{0,q+\tau}}|G_{t,p}(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\sum_{\tau\notin\frac{1}{2}t\sqrt{r(t)}Q}(1+|\tau|)^{-n-1}\int_{\mathbb{R}^n}|G_{t,p}(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$+C\sum_{\tau\in\frac{1}{2}t\sqrt{r(t)}Q}(1+|\tau|)^{-n-1}\sum_{q\notin t\sqrt{r(t)}Q}\int_{Q_{0,q+\tau}}|G_{t,p}(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\|G_{t,p}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sum_{\tau\notin\frac{1}{2}t\sqrt{r(t)}Q}(1+|\tau|)^{-n-1}$$

$$+C\int_{[\frac{1}{2}t\sqrt{r(t)}Q]^c}|G_{t,p}(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C/(t\sqrt{r}(t))^{n+1}+C\int_{|x|>\sqrt{r(t)}/4}|G(x)|^p\mathrm{d}x.$$

因此,

$$\lim_{t\to\infty}\Sigma_2=0.$$

其次, 如使用引理 6.3, 同样可得

$$\sum_{q\in t\sqrt{r(t)}Q}\sup_{y\in Q_{0,q}}|G_{t,p}(y)|^p\leqslant C\|G_{t,p}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C.$$

由此推出

$$\Sigma_1\leqslant C\sum_{v\notin t\sqrt{r(t)}Q}\sup_{y\in Q_{1,v}}|(T^*\psi)(y)|^p.$$

到此, 已不难看出: 如依完全类似于对 Σ_2 的估计方法, 则得

$$\lim_{t\to\infty}\Sigma_1=0.$$

因此, i) 的结论成立。

ii) 设 m 为 $H^p(\mathbf{T}^n)$ 上极大乘子，且 $m\in C(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$。又设 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，$\hat{f}$ 具有紧支集，且 $0\notin \operatorname{supp}\hat{f}$。显然，对任一 $s>0$，$m(s\cdot)\hat{f}(\cdot)\in C_C(\mathbb{R}^n)$。因此，

$$(T_s f)(x)=\lim_{t\to 0+}t^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}m(tsk)\hat{f}(tk)e^{2\pi i t k\cdot x}.$$

由此推出

$$\begin{aligned}\sup_{s>0}|(T_s f)(x)|^p&=\sup_{s>0}\lim_{t\to 0+}t^{np}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}m(tsk)\hat{f}(tk)e^{2\pi i t k\cdot x}\Big|^p\\&=\sup_{s>0}\lim_{t\to 0+}t^n|\tilde{T}_{st}(\tilde{f}_{t,p})(tx)|^p\\&=\sup_{s>0}\lim_{t\to 0+}t^n|\tilde{T}_{st}(\tilde{f}_{t,p})(tx)|^p\mathscr{X}_Q(tx),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{f}_{t,p}(x)=t^{-n/p}\tilde{f}(x/t)$。因此，由 Fatou 引理便得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}[(T^*f)(x)]^p\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{s>0}\lim_{t\to 0+}t^n|\tilde{T}_{st}(\tilde{f}_{t,p})(tx)|^p\mathscr{X}_Q(tx)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\liminf_{t\to 0+}\sup_{s>0}t^n|\tilde{T}_{st}(\tilde{f}_{t,p})(tx)|^p\mathscr{X}_Q(tx)\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}t^n[\tilde{T}^*(\tilde{f}_{t,p})(tx)]^p\mathscr{X}_Q(tx)\mathrm{d}x\\&=\liminf_{t\to 0+}\int_{\mathbf{T}^n}[\tilde{T}^*(f_{t,p})(u)]^p\mathrm{d}u\\&\leqslant C\liminf_{t\to 0+}\|\tilde{f}_{t,p}\|^p_{H^p(\mathbf{T}^n)}=C\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

上式最后一步用到了引理 6.4。最后，注意到 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 中其 Fourier 变换具有紧支集的，且在原点处某个邻域内为零的函数全体构成 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的稠子集，便不难看出 m 为 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上极大乘子。因此，ii)成立，定理证毕。

注 6.2 当 $p>1$ 时，类似于定理 6.3 的结果是由 C. E. Kenig, P. Tomas[KT1]得到的，但[KT1] 的方法是基于 L^p 为一 Banach 空间这一事实，完全不同于定理 6.3 的证法。

作为定理 6.3 的应用，将建立极大 Bochner-Riesz 平均的 $H^p\to L^p$ 的有界性。如以定理 6.3 和定理 5.3 分别代替定理 6.1 和定理 5.4，并依推论 6.1 的证法，可得如下结论。

推论 6.2 设 $0<p\leqslant 1$，且

$$\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}.$$

如记

$$(S_*^\delta f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|(S_{1/\varepsilon}^\delta f)(x)|,$$

则存在一与 f 无关的常数 C，使得

$$\|S_*^\delta f\|_{L^p(T^n)}\leqslant C\|f\|_{H^p(T)^n}.$$

评注与参考文献

§1 定理 1.1 及其证明是属于 M. H. Taibleson, G. Weiss[TW1] 的。利用弱 H^p 空间的原子分解定理，定理 1.1 已被刘和平[Li2]推广到空间 $H(p,\infty)$上去。

§2 M. H. Taibleson, G. Weiss[TW1]原文中只给出了定理 2.3 的证明。在定理 2.2 的条件下，[TW1]的证明可以简化为现在的形式。有关乘子的其它形式的条件已有许多的讨论。例如，可参见 A. Miyachi[Mi1]。

§3 定理 3.1 及其证明是属于 M. H. Taibleson, G. Weiss[TW1]的。

§4 定理 4.1 对 δ-Calderón-Zygmund 算子 T 也成立。这是 J. Alvarez, M. Milman[AM1]中建立的。定理 4.2 和定理 4.3 是属于刘和平 [Li1]的。定理4.4是由 R. Fefferman, F. Soria[FSo1]中得到的。刘和平[Li1]也将定理 4.4 拓广到 $0<p<1$ 情形中去。定理 4.7 最先见于 C. Fefferman, E. M. Stein[FS1]. 定理 4.8 是属于 J. Alvarez, M. Milman[AM1]的，但他们的结果中要求 $p_0<p\leqslant 1$. 实际上，其结论对 $p=p_0$ 也成立。

§5 定理 5.2 和引理 5.1 是属于 E. M. Stein, M. H. Taibleson, G. Weiss[STW1]的。定理 5.4 同时被 P. Sjölin[Sj1] 和 E. M. Stein, M. H. Taibleson, G. Weiss[STW1]得到。定理 5.5 是属于刘智新[Liu1] 的。命题 5.2 和定理 5.6 是属于陆善镇[Lu3]的。对于任意的正实数 k，郑学安 [Zhe1] 得到了一个类似于命题 5.2 结论的分解式。定理 5.7 是属于刘和平、陆善镇[LiL1]的。引理 5.5 的结论当 $J=0$ 时是已知的，而当 $J\neq 0$ 时是新的结果。

§6 定理 6.1 和定理 6.2 是属于刘智新[Liu1] 的。引理 6.2 是属于 C. Fefferman, E. M. Stein [FS1] 的。但这里的证明是采用 A. Miyachi [Mi1] 中的方法。定理6.3 是属于刘智新、陆善镇[LiuL2]的。

第 4 章

在逼近论中的应用

经典的逼近理论是在连续函数空间和 L^p 空间 ($1\leqslant p\leqslant\infty$)中开展研究的。这些空间的共同性质——构成线性赋范空间——起着十分重要的作用。由于 H^p 空间 ($0<p<1$) 不是线性赋范空间，因而许多处理经典逼近问题时所使用的方法在此时已经失效。直到七十年代末期，复 H^p 空间中的逼近理论才有所进展，特别是 E. Storozhenko [Sto 1] 对单位圆盘 D 上的复 $H^p(D)$ 空间 ($0<p\leqslant 1$) 中的三角多项式逼近问题进行了较系统的研究，得到了一系列平行于 $L^p(p\geqslant 1)$ 情形的结果。但是，[Sto 1] 所使用的方法严重依赖于复 H^p 函数的解析性质，因而很难推广到高维情形。既然多元 H^p 空间的实变理论已较完整地建立起来了，自然可以设想用实变方法来研究 H^p 空间上的逼近问题，这便是本章的宗旨。

从本章的内容可以看出，Fefferman-Stein 的 H^p 实变理论和 Coifman-Latter-Taibleson-Weiss 的 H^p 原子分解及分子分解结构理论在研究逼近问题时仍是一个强有力的工具。特别地，H^p 空间上的乘子理论起了重要的作用。应当指出，运用乘子理论于逼近问题的思想来源于 H. S. Sharpiro [Sh1]。

§1 K 泛 函

如所周知，K 泛函是现代逼近论中的一个重要概念，它是建立逼近论中量化不等式的量化尺度。本节中，首先引进适用于实 H^p 空间中逼近问题的 K 泛函。为此，先给出若干必要的记号。设

$f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，$0<p<\infty$。f 的 σ 阶 Riesz 导数 $I^\sigma f$ 可用下式来定义：

$$(I^\sigma f)^\wedge(x)=|x|^\sigma\hat{f}(x).$$

同时，由此而产生 H^p 的一类子空间 $H^{p,\sigma}$：

$$H^{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)=\{f\in H^p(\mathbb{R}^n):I^\sigma f\in H^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

定义 1.1 设 $\sigma>0$，$t>0$，$0<p<\infty$，以及 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$。f 的 σ 阶 K 泛函是指

$$K_\sigma(f,\ t)_{H^p}=\inf_{g\in H^{p,\sigma}}\{\|f-g\|_{H^p}+t^\sigma\|I^\sigma g\|_{H^p}\}.$$

注 1.1 上式右端中 g 的取值范围 $H^{p,\sigma}$ 以其稠子空间 $H_2^{p,\sigma}=\{g\in H^p\cap L^2:I^\sigma g\in H^p\cap L^2\}$ 代替后，上式右端之值不变。事实上，如取 $g\in H^{p,\sigma}$，则 $g\in H^p$，且 $I^\sigma g\in H^p$。但第 2 章命题3.4的证明已表明 $P_t*g\in H^p\cap L^2$，其中 P 为 Poisson 核，以及 $P_y(x)=y^{-n}P(x/y)$。因此，由等式

$$\begin{aligned}[I^\sigma(P_y*g)]^\wedge(x)&=\hat{P}_y(x)\cdot\widehat{(I^\sigma g)}(x)\\&=e^{-2\pi y|x|}\widehat{(I^\sigma g)}(x),\end{aligned}$$

可知 $I^\sigma(P_y*g)=P_y*I^\sigma g\in H^p\cap L^2$。再注意到第 2 章命题 3.4的证明中已得到

$$\|g-P_y*g\|_{H^p}+\|I^\sigma g-P_y*I^\sigma g\|_{H^p}\to 0,\ \text{当}\ y\to 0_+.$$

因此，前面的断言成立。

关于上述定义的 K 泛函，有下列几个重要的性质。

命题 1.1 设 $\sigma>0$，$t>0$，且 $0<p<\infty$。

(i) 若 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，则

$$K_\sigma(f,\ t)_{H^p}\leqslant\|f\|_{H^p};$$

(ii) 若 f_1、$f_2\in H^p(\mathbb{R}^n)$，则

$$\{K_\sigma(f_1+f_2,\ t)_{H^p}\}^p\leqslant\{K_\sigma(f_1,\ t)_{H^p}\}^p+\{K_\sigma(f_2,\ t)_{H^p}\}^p;$$

(iii) 若 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{t\to 0_+}K_\sigma(f,\ t)_{H^p}=0;$$

(iv) 若 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，且 $0<\sigma_1<\sigma$，则存在一与 f、t 无关的常数 C，使得

$$K_\sigma(f, t)_{H^p} \leqslant Ct^{\sigma_1} K_{\sigma-\sigma_1}(I^{\sigma_1}f, t)_{H^p}.$$

证明 由定义1.1不难看出(i)和(ii)成立。下面，给出(iii)的证明。设 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$。由第2章命题3.4的证明可知

$$\lim_{y\to 0+} \|f - P_y * f\|_{H^p} = 0. \tag{1.1}$$

其次，容易验证 $m(x) = |x|^\sigma e^{-\pi y|x|}$ 满足乘子的 Mihlin 条件(见第3章(2.1)式)。因此，由等式

$$[I^\sigma(P_y * f)]^\wedge(x) = |x|^\sigma e^{-\pi y|x|}(P_{y/2} * f)^\wedge(x),$$

并使用第3章定理2.2，便得到 $I^\sigma(P_y * f) \in H^p(\mathbb{R}^n)$。这一事实结合(1.1)式便可推出(iii)的结论。至于(iv)的证明，将推延到后面§3去完成。

上述命题(iii)的结论表明：K 泛函被用来衡量 H^p 空间中收敛速度的量化尺度是合适的。自然，还有另一种常用的量化尺度——连续模。精确地说，k 阶 H^p 连续模 $\omega_k(f, t)_{H^p}$ 的定义由下式给出：

$$\omega_k(f, t)_{H^p} = \sup_{|u|<t} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(\cdot + ju) \right\|_{H^p},$$

其中 $k \in \mathbb{N}$。当 $\sigma = k \in \mathbb{N}$ 时，K 泛函 $K_k(f, t)_{H^p}$ 同 k 阶连续模 $\omega_k(f, t)_{H^p}$ 有着等价的关系。

命题 1.2 设 $k \in \mathbb{N}$，则存在一常数 $A = A(n, p, k)$，使得

$$A^{-1}K_k(f, t)_{H^p} \leqslant \omega_k(f, t)_{H^p} \leqslant AK_k(f, t)_{H^p}.$$

命题的证明也将推延到后面§3来完成。

§2 H^p 乘子与 Jackson 型不等式

回忆一下，在第3章§2中函数 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 被称为 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界 Fourier 乘子或 H^p 乘子，是指由等式

$$(Mf)^\wedge(x) = m(x)\hat{f}(x), \quad f \in H^p \cap L^2$$

所定义的算子 M 可以扩充为 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子。下面，将研究一类特殊的 H^p 乘子。

定义 2.1 设 $m\in L^\infty(R^n)$，若由等式

$$(M_\varepsilon f)^\wedge(x)=m(\varepsilon x)\hat{f}(x),\ f\in H^p\cap L^2 \tag{2.1}$$

所定义的算子族 $\{M_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 可以扩充为 $H^p(R^n)$ 上的有界算子族，且其范数关于 ε 是一致有界的，则称 $m(x)$ 为齐性 H^p 乘子。

不难看出，大于临界阶的 Bochner-Riesz 平均，广义 Abel-Poisson 平均等若干基本算子，都是由某个相应的齐性 H^p 乘子所定义的乘子算子。对于一般齐性 H^p 乘子所确定的乘子算子，有以下的 Jackson 型量化不等式。

定理 2.1 设 $0<p<\infty$, $\sigma>0$, $m(x)$ 为齐性 H^p 乘子，以及 $\{M_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ 由(2.1)式所定义，则下列两个事实等价：

i) $\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}\leqslant CK_\sigma(f,\ \varepsilon)_{H^p}$;

ii) $u(x)\triangleq|x|^{-\sigma}\{m(x)-1\}$ 为齐性 H^p 乘子，

其中常数 C 与 ε 无关。

证明 先证 ii)⇒i)。首先，对任一 $g\in H_2^{p,\sigma}$，有

$$\begin{aligned}(M_\varepsilon g-g)^\wedge(x)&=\{m(\varepsilon x)-1\}\hat{g}(x)\\&=|x|^{-\sigma}\{m(\varepsilon x)-1\}(I^\sigma g)^\wedge(x)\\&=\varepsilon^\sigma u(\varepsilon x)(I^\sigma g)^\wedge(x).\end{aligned}$$

由此推出

$$\|M_\varepsilon g-g\|_{H^p}\leqslant C\varepsilon^\sigma\|I^\sigma g\|_{H^p}. \tag{2.2}$$

其次，对任一 $f\in H^p(R^n)$，以及任一 $g\in H_2^{p,\sigma}(R^n)$，有

$$\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}\leqslant C\{\|M_\varepsilon(f-g)\|_{H^p}+\|M_\varepsilon g-g\|_{H^p}+\|f-g\|_{H^p}\}.$$

注意到 $m(x)$ 为齐性 H^p 乘子，由上式和(2.2)式便得到

$$\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}\leqslant C\{\|f-g\|_{H^p}+\varepsilon^\sigma\|I^\sigma g\|_{H^p}\}.$$

显然，上面最后一式便蕴含着 i) 的结论。

再证 i)⇒ii)。对任一 $g\in H_2^{p,\sigma}(R^n)$，由 $K_\sigma(g,\ \varepsilon)$ 的定义可得

$$\|M_\varepsilon g-g\|_{H^p}\leqslant CK_\sigma(g,\ \varepsilon)_{H^p}\leqslant C\varepsilon^\sigma\|I^\sigma g\|_{H^p}.$$

上式可改写成

$$\|\varepsilon^{-\sigma}(M_\varepsilon g-g)\|_{H^p}\leqslant C\|I^\sigma g\|_{H^p}.$$

由等式

$$\varepsilon^{-\sigma}(M_\varepsilon g-g)^\wedge(x)=\varepsilon^{-\sigma}\{m(\varepsilon x)-1\}\hat{g}(x)$$
$$=u(\varepsilon x)(I^\sigma g)^\wedge(x)$$

看出，前一不等式又可改写成

$$\|U_\varepsilon(I^\sigma g)\|_{H^p}\leqslant C\|I^\sigma g\|_{H^p}, \tag{2.3}$$

其中算子族 $\{U_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ 由等式

$$(U_\varepsilon f)^\wedge(x)=u(\varepsilon x)\hat{f}(x),\ f\in H^p\cap L^2$$

所定义。如果能够证明子空间 $I^\sigma H_2^{p,\sigma}\triangleq\{I^\sigma g:g\in H_2^{p,\sigma}\}$ 在 H^p 中稠密，则(2.3)式就表明 $u(x)$ 为齐性 H^p 乘子。因此，为证 (i)，只需证明 $I^\sigma H_2^{p,\sigma}$ 在 H^p 中稠密。为此，需要 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_{p,2}^s$ 的某些事实(参见 [Tr 1])。

设 $0<p<\infty$，且 $-\infty<s<\infty$。空间 $\dot{F}_{p,2}^s$ 的定义如下：

$$\dot{F}_{p,2}^s(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\dot{F}_{p,2}^s}$$
$$\triangleq\|\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{sk}|(\varphi_k*f)(\cdot)|)^2\}^{1/2}\|_p<\infty\},$$

其中 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 构成 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的单位分解，并满足下列三个条件：

(1) $\operatorname{supp}\hat{\varphi}_k\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n:1/2\leqslant 2^{-k}|\xi|\leqslant 2\}$；

(2) $|\hat{\varphi}_k(\xi)|\geqslant C>0$，当 $3/5\leqslant 2^{-k}|\xi|\leqslant 5/3$；

(3) $|D^\alpha\hat{\varphi}_k(\xi)|\leqslant C_\alpha 2^{-k|\alpha|}$，$\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$。

又设 $-\infty<\sigma<\infty$，熟知 Riesz 导数算子 I^σ 为 $\dot{F}_{p,2}^s\to\dot{F}_{p,2}^{s-\sigma}$ 的等距同构映射。此外，$\dot{F}_{p,2}^0(\mathbb{R}^n)=H^p(\mathbb{R}^n)$ (见[Tr 1])。由后一事实推出：当 $f\in H^p\cap L^2$ 时，有

$$\|f\|_{H^q}\sim\|(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\varphi_k*f|^2)^{1/2}\|_q,\ 当\ q=2\ 或\ p。$$

如置

$$f_m=\sum_{k=-m}^{\infty}(\varphi_k*f),$$

则由 $L^q(l^2,\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 乘子定理(见 [Tr 1, p 31])，可得

$$\|f_m\|_{\dot{F}_{q,2}^0}=\left\|\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\varphi_k*f_m|^2\right)^{1/2}\right\|_q$$

$$= \left\| \left(\sum_{k=-m-1}^{\infty} |\varphi_k * (\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * f|^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$\leqslant C \left\| \left(\sum_{k=-m-1}^{\infty} |\varphi_k * f|^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$\leqslant C \|f\|_{\dot{F}_{q,2}^0},$$

以及

$$\|f - f_m\|_{\dot{F}_{q,2}^0} = \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k * (f - f_m)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$= \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{-m+1} |\varphi_k * (\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * f|^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$\leqslant C \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{-m+1} |\varphi_k * f|^2 \right)^{1/2} \right\|_q,$$

其中 $q=2$ 或 $q=p$。因此，由控制收敛定理得

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\dot{F}_{q,2}^0} = 0, \text{ 当 } q=2 \text{ 或 } p.$$

为此，余下只需证明 $f_m \in I^\sigma H_2^{p,\sigma}$，或者只需证明 $g_m \triangleq I^{-\sigma} f_m \in H_2^{p,\sigma}$。但由 $H_2^{p,\sigma}$ 的定义，又只需证明 $g_m \in H^p \cap L^2 = \dot{F}_{p,2}^0 \cap \dot{F}_{2,2}^0$，显然，后者又等价于 $f_m \in \dot{F}_{p,2}^{-\sigma} \cap \dot{F}_{2,2}^{-\sigma}$。最后这一事实的证明是简单的。事实上，当 $q=2$ 或 $q=p$ 时，

$$\|f_m\|_{\dot{F}_{q,2}^{-\sigma}} = \left\| \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^{-k\sigma} |\varphi_k * f_m|)^2 \right\}^{1/2} \right\|_q$$

$$= \left\| \left\{ \sum_{k=-m-1}^{\infty} (2^{-k\sigma} |\varphi_k * (\varphi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}) * f|)^2 \right\}^{1/2} \right\|_q$$

$$\leqslant C \left\| \left\{ \sum_{k=-m-1}^{\infty} (2^{-k\sigma} |\varphi_k * f|)^2 \right\}^{1/2} \right\|_q$$

$$\leqslant C\, 2^{\sigma(m+1)} \|f\|_{\dot{F}_{q,2}^0} < \infty.$$

到此，定理证毕。

上述定理给出了 Jackson 型不等式

$$\|M_\varepsilon f - f\|_{H^p} \leqslant C K_\sigma(f, \varepsilon)_H. \tag{2.4}$$

成立的一个等价特征。由此可导致一个为使 (2.4) 式成立而又便于检验的充分条件。

定理 2.2 设 $0<p<\infty$，$\sigma>0$，$m(x)$ 为齐性 H^p 乘子，以及算子族 $\{M_\varepsilon : \varepsilon>0\}$ 由 (2.1) 式所定义。若存在 $d>0$，使得下列两

个条件成立：

(1) $|m(x)-1|\leqslant C|x|^{\sigma}$，当 $|x|\leqslant d$；

(2) 对每一 $\alpha\in \mathbf{Z}_+^n$，$0<|\alpha|\leqslant k_p$，以及 $0<R<d$，有

$$\int_{R/2<|x|<R}|D^\alpha m(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant CR^{n-2(|\alpha|-\sigma)},$$

则(2.4)式成立，其中 C 与 R 无关，且

$$k^p=\begin{cases}[n/2]+1, & \text{当 } 1\leqslant p<\infty,\\ \left[n\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right)\right]+1, & \text{当 } 0<p<1.\end{cases}$$

为证定理，先建立一个引理。

引理 2.1 设 $0<p<\infty$。若 $m(x)$ 满足 Hörmander 条件

$$\sup_{0<R<\infty} R^{2|\alpha|-n}\int_{R/2<|x|<R}|D^\alpha m(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant C,\ \alpha\in \mathbf{Z}_+^n,\quad |\alpha|\leqslant k_p,$$

特别地，$m(x)$ 满足 Mihlin 条件

$$\sup_{x\in \mathbf{R}^n}|x|^{|\alpha|}|D^\alpha m(x)|\leqslant C,\ \alpha\in \mathbf{Z}_+^n,\ |\alpha|\leqslant k_p,$$

则 $m(x)$ 为齐性 H^p 乘子。

证明 事实上，引理的结论可由第3章定理2.3和不等式

$$\begin{aligned}\int_{R/2<|x|<R}|D^\alpha m(\varepsilon x)|^2\mathrm{d}x&=\varepsilon^{2|\alpha|-n}\int_{\varepsilon R/2<|y|<\varepsilon R}|D^\alpha m(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant \varepsilon^{2|\alpha|-n}A(R\varepsilon)^{n-2|\alpha|}\\&=AR^{n-2|\alpha|}\end{aligned}$$

直接推得。

定理 2.2 的证明 任取一 $\varphi\in\mathscr{S}$，使得

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |x|\geqslant d/2,\\ 1, & \text{当 } |x|\leqslant d/4.\end{cases}$$

将 $u(x)=|x|^{-\sigma}\{m(x)-1\}$ 写成

$$u(x)=\varphi(x)u(x)+\{1-\varphi(x)\}u(x)\triangleq u_1(x)+u_2(x).$$

以下，只需证明 u_1 和 u_2 均为齐性 H^p 乘子。

由于 $m(x)-1$ 为齐性 H^p 乘子，并注意到 $u_2(x)=\{1-\varphi(x)\}|x|^{-\sigma}\{m(x)-1\}$，故为证 u_2 是齐性 H^p 乘子，只需证明 $\{1-\varphi(x)\}|x|^{-\sigma}$ 为齐性 H^p 乘子。后一事实是简单的。事实上，由不等式

$$|D^\alpha(|x|^{-\sigma})|\leqslant C_\alpha|x|^{-\sigma-|\alpha|},\ x\in R^n\setminus\{0\},\qquad(2.5)$$

和 φ 的定义不难验证 $|x|^{-\sigma}\{1-\varphi(x)\}$ 满足引理 2.1 的条件，故它必为齐性 H^p 乘子。从而，u_2 为齐性 H^p 乘子。

对于 $u_1(x)=\varphi(x)\{m(x)-1\}|x|^{-\sigma}$，分两种情形来考虑。首先，当 $0<R<d$，且 $R/2\leqslant|x|\leqslant R$ 时，由等式

$$D^\alpha(|x|^{-\sigma}\{m(x)-1\})=\{m(x)-1\}D^\alpha(|x|^{-\sigma})+\sum_{0<|\gamma|\leqslant|\alpha|}C_\gamma(D^{\alpha-\gamma}|x|^{-\sigma})D^\gamma m(x),$$

定理的条件(1)，以及(2.5)式便得

$$|D^\alpha(|x|^{-\sigma}\{m(x)-1\})|\leqslant C\{|x|^{-|\alpha|}+\sum_{0<|\gamma|\leqslant|\alpha|}|x|^{-\sigma+|\gamma|-|\alpha|}|D^\gamma m(x)|\}。$$

再由条件(2)，可得

$$\begin{aligned}&\int_{R/2\leqslant|x|\leqslant R}|D^\alpha(|x|^{-\sigma}\{m(x)-1\})|^2dx\\ &\leqslant C\left\{\int_{R/2\leqslant|x|\leqslant R}|x|^{-2|\alpha|}dx\right.\\ &\quad\left.+\sum_{0<|\gamma|\leqslant|\alpha|}\int_{R/2\leqslant|x|\leqslant R}|x|^{2(|\gamma|-\sigma-|\alpha|)}|D^\gamma m(x)|^2dx\right\}\\ &\leqslant C_\alpha R^{n-2|\alpha|}.\end{aligned}$$

由此推出

$$\int_{R/2\leqslant|x|\leqslant R}|D^\alpha u_1(x)|^2dx\leqslant CR^{n-2|\alpha|},\ 当\ 0<R<d。$$

当 $R\geqslant d$，且 $R/2\leqslant|x|\leqslant R$ 时，$|x|\geqslant d/2$。从而，$\varphi(x)=0$。因此，上面最后的不等式仍然成立。从而，由引理 2.1 可知 u_1 为齐性 H^p 乘子，定理证毕。

作为定理 2.2 的一个简单应用，下面来考虑大于临界阶的 Bochner-Riesz 乘子

$$m(x)=(1-|x|^2)_+^\delta,\ \delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}(0<p\leqslant1)。$$

注意到第 3 章定理 5.4 的结论已蕴含着上述的 $m(x)$ 为一齐性 H^p 乘子。此外，不难验证 $m(x)$ 满足定理 2.2 的条件。因此，由定理 2.2 直接推得如下的结果。

推论 2.1　设 $0<p\leqslant 1$, $\delta>\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$, 以及 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，则

$$\|B_R^\delta f-f\|_{H^p}\leqslant CK_2\left(f,\ \frac{1}{R}\right)_{H^p},$$

其中 $B_R^\delta f$ 为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 δ 阶 Bochner-Riesz 平均。

§3　H^p 乘子与 Bernstein 型不等式

本节的主要目的是要建立 H^p 空间上逼近的逆定理——Bernstein 型不等式。为此，先叙述一个辅助引理，其证明是简单的，可以对 $|\alpha|$ 使用归纳法来完成。

引理 3.1　设 $m(x)=u(g(x))$，其中 $g(x)$ 和 $u(t)$ 分别在 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 和 $g(\Omega)\subset\mathbb{R}$ 内具有充分的光滑性，则对任一 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $\alpha\neq 0$, 有

$$D^\alpha m(x)=\sum_{k=1}^{|\alpha|}u^{(k)}(g(x))\sum_{\substack{\gamma^1+\cdots+\gamma^k=|\alpha|\\ \gamma^j\in\mathbb{Z}_+^n(1\leqslant j\leqslant k)}}C_{\gamma^1,\cdots,\gamma^k}D^{\gamma^1}g(x)\cdots D^{\gamma^k}g(x),$$

其中 $C_{\gamma^1,\cdots,\gamma^k}$ 为常数。

定理 3.1　设 $0<p<\infty$, $\sigma>0$, $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，且 m 满足下面两个条件：

(1)　$|m(x)-1|\geqslant B\min\{1,\ |x|^\sigma\}$;

(2)　$|D^\alpha m(x)|$

$$\leqslant\begin{cases}B_1|x|^{\sigma-|\alpha|}, & \text{当 } 0<|x|\leqslant 1,\ \text{且 } 1\leqslant|\alpha|\leqslant k_p,\\ B_1|x|^{-\sigma-|\alpha|}, & \text{当 } |x|>1,\ \text{且 } |\alpha|\leqslant k_p,\end{cases}$$

其中 B 和 B_1 为正常数，而 k_p 如定理 2.2 中所述。若 $\{M_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ 为一族由(2.1)式所定义的乘子算子，则存在一与 f、ε 无关的常数 C，使得

$$K_\sigma(f,\ \varepsilon)_{H^p}\leqslant C\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}.\tag{3.1}$$

证明　由条件(1)和(2)易证 $m(x)$ 满足 Mihlin 条件

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^{|\alpha|}|D^\alpha m(x)|\leqslant C,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha|\leqslant k_p.$$

因此，由引理 2.1 可知 $m(x)$ 为齐性 H^p 乘子。如注意到子空间 $H^p(R^n)\cap L^2(R^n)$ 在 $H^p(R^n)$ 中稠密，则由命题 1.1 中的 (i) 和 (ii)，只需证明(3.1)式对任一 $f\in H^p\cap L^2$ 成立即可。为此，以下设 $f\in H^p\cap L^2$。注意到 $M_\varepsilon f-f\in H^p\cap L^2$，则

$$\begin{aligned}[I^\sigma(M_\varepsilon f)]^\wedge(x)&=|x|^\sigma m(\varepsilon x)\hat{f}(x)\\&=\varepsilon^{-\sigma}\cdot\frac{|\varepsilon x|^\sigma m(\varepsilon x)}{m(\varepsilon x)-1}\cdot\{[m(\varepsilon x)-1]\hat{f}(x)\}\\&=\varepsilon^{-\sigma}\cdot u(\varepsilon x)\cdot(M_\varepsilon f-f)^\wedge(x),\end{aligned}$$

其中 $u(x)=|x|^\sigma m(x)[m(x)-1]^{-1}$。因此，如果能证明 $u(x)$ 为一齐性 H^p 乘子，则 $M_\varepsilon f\in H_2^{p,\sigma}$，且

$$\|I^\sigma(M_\varepsilon f)\|_{H^p}\leqslant C\varepsilon^{-\sigma}\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}.$$

由此推出

$$\begin{aligned}K_\sigma(f,\ \varepsilon)_{H^p}&\leqslant\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}+\varepsilon^\sigma\|I^\sigma(M_\varepsilon f)\|_{H^p}\\&\leqslant C\|M_\varepsilon f-f\|_{H^p}.\end{aligned}$$

因此，为证(3.1)式成立，只需证明 $u(x)$ 为一齐性 H^p 乘子。事实上，由条件(1)，(2)，以及 $m\in L^\infty(R^n)$ 便可知 $u(x)\in L^\infty(R^n)$。其次，

$$u(x)=|x|^\sigma\left(1+\frac{1}{m(x)-1}\right),$$

并对 $[m(x)-1]^{-1}$ 使用引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}&\left|D^\alpha\left(\frac{1}{m(x)-1}\right)\right|\\&\leqslant C_\alpha\sum_{k=1}^{|\alpha|}|m(x)-1|^{-k-1}\sum_{\gamma^1+\cdots+\gamma^k=|\alpha|}|D^{\gamma^1}m(x)\cdots D^{\gamma^k}m(x)|.\end{aligned}$$

如再次使用条件(1)和(2)，则当 $0<|x|<1$ 时，得

$$\begin{aligned}\left|D^\alpha\left(\frac{1}{m(x)-1}\right)\right|&\leqslant C_\alpha\sum_{k=1}^{|\alpha|}|x|^{-(k+1)\sigma}|x|^{k\sigma-(|\gamma^1|+\cdots+|\gamma^k|)}\\&\leqslant C_\alpha|x|^{-\sigma-|\alpha|},\end{aligned}$$

而当 $|x|\geqslant1$ 时，得

$$\begin{aligned}\left|D^\alpha\left(\frac{1}{m(x)-1}\right)\right|&\leqslant C_\alpha\sum_{k=1}^{|\alpha|}|x|^{-k\sigma-|\alpha|}\\&\leqslant C_\alpha|x|^{-\sigma-|\alpha|}.\end{aligned}$$

因此，

$$|D^{\beta} u(x)| \leqslant \left|\frac{m(x)}{m(x)-1}\right| \cdot |D^{\beta}(|x|^{\sigma})|$$

$$+\sum_{0<|\alpha| \leqslant \beta} C_{\alpha}|D^{\beta-\alpha}(|x|^{\sigma})|\left|D^{\alpha}\left(\frac{1}{m(x)-1}\right)\right|$$

$$\leqslant C|x|^{-\sigma}|x|^{\sigma-|\beta|}$$

$$+C \sum_{0<|\alpha| \leqslant|\beta|}|x|^{\sigma-|\beta-\alpha|}|x|^{-\sigma-|\alpha|}$$

$$\leqslant C|x|^{-|\beta|}.$$

上式表明$u(x)$满足 Mihlin 条件。从而，由引理 2.1 便知$u(x)$为一齐性 H^p 乘子。到此，定理证毕。

下面，将使用定理 2.2 和定理 3.1 来建立若干具体逼近算子的 Jackson 型不等式和 Bernstein 型不等式。首先，考虑广义 Bochner-Riesz 平均 $B_t^{\sigma,\delta}$，它可由下式定义：

$$(B_t^{\sigma,\delta} f)^{\wedge}(x)=(1-|tx|^{\sigma})_+^{\delta} \hat{f}(x), \quad f \in H^p \cap L^2,$$

其中 σ, δ 及 t 均为正数。显然，$B_t^{\sigma,\delta}$ 可以看成由

$$m(x)=(1-|x|^{\sigma})_+^{\delta}$$

按(2.1)式所定义的乘子算子族。如利用 Bessel 函数的性质，则不难验证 $m(x)$ 具有下列性质：

(1) $C_1|x|^{\sigma} \leqslant 1-m(x) \leqslant C_2|x|^{\sigma}$，当 $|x| \leqslant 1/2$，

(2) $1-m(x) \geqslant 1-(1-2^{-\sigma})^{\delta}$，当 $|x|>1/2$，

(3) $|D^{\alpha} m(x)| \leqslant C_{\alpha}|x|^{\sigma-|\alpha|}$，当 $0<|x| \leqslant 1/2, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，$\alpha \neq 0$，

(4) $|D^{\alpha} m(x)|$

$$\leqslant\begin{cases}C_{\alpha}|x|^{\sigma-|\alpha|}, & \text{当 } 0<|x|<1,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \alpha \neq 0,\ \delta>|\alpha|, \\ 0, & \text{当 } |x| \geqslant 1.\end{cases}$$

推论 3.1　设 $0<p<\infty$，$\sigma>0$，及 $\delta>0$。若 $m(x)=(1-|x|^{\sigma})_+^{\delta}$ 为一齐性 H^p 乘子，则存在一与 f、t 无关的正常数 C，使得

$$C^{-1} K_{\sigma}(f, t)_{H^p} \leqslant\|B_t^{\sigma,\delta} f-f\|_{H^p} \leqslant C K_{\sigma}(f, t)_{H^p}. \tag{3.2}$$

证明　由性质(1)和(3)易证 $m(x)$ 满足定理 2.2 的条件。由此推知(3.2)式右端的不等式成立。为证(3.2)式左端不等式，分

两种情形来考虑。首先，当 $\delta>k_p$ 时，由 $m(x)$ 所满足的性质(1)、(2)及(4)可知，$m(x)$ 满足定理 3.1 的条件。由此可知(3.2)式的左端不等式成立。其次，当 $\delta\leqslant k_p$ 时，取一 $N\in \boldsymbol{N}$，使得 $N\delta>k_p$。因而，由已证的结果得

$$\begin{aligned}K_\sigma(f,\ t)_{H^p}&\leqslant C\|B_t^{\sigma,N\delta}f-f\|_{H^p}\\&\leqslant C\left\{\|B_t^{\sigma,\delta}f-f\|_{H^p}+\sum_{k=1}^{N-1}\|B_t^{\sigma,(k+1)\delta}f\right.\\&\quad\left.-B_t^{\sigma,k\delta}f\|_{H^p}\right\}\leqslant C\left\{\|B_t^{\sigma,\delta}f-f\|_{H^p}\right.\\&\quad\left.+\sum_{k=1}^{N-1}\|\underbrace{B_t^{\sigma,\delta}\cdots B_t^{\sigma,\delta}}_{k\text{重}}(B_t^{\sigma,\delta}f-f)\|_{H^p}\right\}\\&\leqslant C\|B_t^{\sigma,\delta}f-f\|_{H^p}.\end{aligned}$$

上式最后一步用到了 $m(x)$ 为齐性 H^p 乘子这一条件，证毕。

现在，考虑广义 Abel-Poisson 算子 W_t^σ，它可由下式来定义：

$$(W_t^\sigma f)^\wedge(x)=e^{-|tx|^\sigma}\hat{f}(x),\ f\in H^p\cap L^2,\ \sigma>0.$$

显然，W_t^σ 可以看成由

$$m(x)=e^{-|x|^\sigma},\ \sigma>0$$

按(2.1)式所定义的乘子算子族。不难验证，$m(x)$ 具有下列性质：

(a) $e^{-1}|x|^\sigma\leqslant 1-m(x)\leqslant|x|^\sigma$，当 $|x|\leqslant 1$；

(b) $1-m(x)\geqslant 1-e^{-1}$，当 $|x|>1$；

(c) $|D^\alpha m(x)|$

$$\leqslant\begin{cases}C^\alpha|x|^{\sigma-|\alpha|}, & \text{当 } 0<|x|\leqslant 1,\ \alpha\in \boldsymbol{Z}_+^n,\ \alpha\neq 0,\\ C_\alpha|x|^{-\sigma-|\alpha|}, & \text{当 } |x|>1,\ \alpha\in \boldsymbol{Z}_+^n.\end{cases}$$

如使用性质 (a)～(c)，则不难证明 $m(x)=e^{-|x|^\sigma}$ 满足定理 2.2 和定理 3.1 的条件。由此推得如下的结果。

推论 3.2 设 $0<p<\infty$，且 $\sigma>0$，则存在一与 f、t 无关的常数 C，使得

$$C^{-1}K_\sigma(f,\ t)_{H^p}\leqslant\|W_t^\sigma f-f\|_{H^p}\leqslant CK_\sigma(f,\ t)_{H^p}.$$

作为(3.2)式的应用，本节最后将完成命题 1.1(iv) 和命题 1.2 的证明。

命题 1.1(iv)的证明 如记

$$\delta_p=\begin{cases}\dfrac{n}{p}-\dfrac{n+1}{2}, & 当\ 0<p\leqslant 1,\\[2ex] (n-1)\left|\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right|, & 当\ 1<p<\infty,\end{cases}$$

则由 E.M.Stein 的经典结果（见[St 1]）和第 3 章定理 5.5 可知：当 $\delta>\delta_p$ 时，$m_\sigma(x)=(1-|x|^\sigma)_+^\delta$ 为一齐性 H^p 乘子。对给定的 $\sigma>0$，任取一正数 $\sigma_0<\sigma$。由 $m_\sigma(x)$ 所具有的性质(1)和(3)可得

$$|m_\sigma(x)-1|\leqslant C|x|^{\sigma_0},\ 当\ |x|\leqslant 1/2,$$

以及

$$|D^\alpha m_\sigma(x)|\leqslant C_\alpha|x|^{\sigma_0-|\alpha|},\ 当\ 0<|x|\leqslant 1/2,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\ \alpha\neq 0.$$

由此易证 $m_\sigma(x)$ 满足定理 2.2 的条件(在那里，取 $m(x)=m_\sigma(x)$，$\sigma=\sigma_0$，以及 $d=1/2$)。因此，

$$\|B_{1/t}^{\sigma,\delta}f-f\|_{H^p}\leqslant CK_{\sigma_0}(f,t)_{H^p},\ \sigma_0<\sigma.$$

由上式和(3.2)式左端的不等式得

$$K_\sigma(f,t)_{H^p}\leqslant CK_{\sigma_0}(f,t)_{H^p},\ \sigma_0<\alpha. \tag{3.3}$$

如记

$$u_1(x)=2-m_\sigma(x),$$
$$u_2(x)=\varphi(x)\{(1-|x|^\sigma)/(1-|x|^{\sigma_0})\}^\delta,$$

以及

$$u_3(x)=|x|^{\sigma_0}m_{\sigma_2}(x)\cdot\{m_{\sigma_2}(x)-1\}^{-1},$$

其中 $\sigma_2>0$，$\varphi\in\mathscr{S}$，$\operatorname{supp}\varphi\subset\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leqslant 2\}$，且

$$\varphi(x)=1,\ 当\ |x|\leqslant 3/2,$$

则不难证明 $u_i(x)\ (i=1,2,3)$ 均为齐性 H^p 乘子。事实上，上述断言可使用 $m_\sigma(x)$ 所具有的性质 (1)～(4) 以及引理 2.1 直接推得。

现在，对任给的 $\sigma_1>0$，记 $\sigma=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$。若 $f\in H_2^{p,\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$，则

$$\begin{aligned}&|x|^{\sigma_1+\sigma_0}\{2m_\sigma(tx)-m_\sigma^2(tx)\}\hat{f}(x)\\&=t^{-\sigma_0}\{2-m_\sigma(tx)\}m_\sigma(tx)|tx|^{\sigma_0}(I^{\sigma_1}f)^\wedge(x)\end{aligned}$$

$$= t^{-\sigma_2}\{2-m_\sigma(tx)\}\frac{|tx|^{\sigma_2}m_{\sigma_2}(tx)}{m_{\sigma_2}(tx)-1}$$

$$\cdot\frac{m_\sigma(tx)}{m_{\sigma_2}(tx)}\cdot\{m_{\sigma_2}(tx)-1\}(I^{\sigma_1}f)^\wedge(x)$$

$$= t^{-\sigma_2}u_1(tx)u_2(tx)u_3(tx)[B_{1/t}^{\sigma_2,\delta}(I^{\sigma_1}f)-I^{\sigma_1}f]^\wedge(x).$$

由于 $u_i(i=1,2,3)$ 均为齐性 H^p 乘子，故

$$2(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)-B_{1/t}^{\sigma,\delta}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)\in H_2^{p,\sigma_1+\sigma_2},$$

且

$$\|I^{\sigma_1+\sigma_2}[2(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)-B_{1/t}^{\sigma,\delta}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)]\|_{H^p}$$

$$\leqslant Ct^{-\sigma_2}\|B_{1/t}^{\sigma_2,\delta}(I^{\sigma_1}f)-I^{\sigma_1}f\|_{H^p}$$

$$\leqslant Ct^{-\sigma_2}K_{\sigma_2}(I^{\sigma_1}f,t)_{H^p}.$$

因此，如记 E 为恒等算子，并注意到

$$2(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)-B_{1/t}^{\sigma,\delta}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)\in H_2^{p,\sigma_1+\sigma_2},$$

则

$$K_{\sigma_1+\sigma_2}(f,t)_{H^p}\leqslant\|f-[2(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)-B_{1/t}^{\sigma,\delta}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)]\|_{H^p}$$

$$+t^{\sigma_1+\sigma_2}\|I^{\sigma_1+\sigma_2}[2(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)$$

$$-B_{1/t}^{\sigma,\delta}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f)]\|_{H^p}$$

$$\leqslant\|[B_{1/t}^{\sigma,\delta}-E]^2f\|_{H^p}+Ct^{\sigma_1}K_{\sigma_2}(I^{\sigma_1}f,t)_{H^p}.$$

因此，为证命题1.1(iv)，只需证明

$$\|[B_{1/t}^{\sigma,\delta}-E]^2f\|_{H^p}\leqslant Ct^{\sigma_1}K_{\sigma_2}(I^{\sigma_1}f,t)_{H^p}.$$

但后者可由(3.2)式和(3.3)式推出：

$$\|[B_{1/t}^{\sigma,\delta}-E]^2f\|_{H^p}\leqslant CK_\sigma(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f-f,t)_{H^p}$$

$$\leqslant CK_{\sigma_1}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f-f,t)_{H^p}$$

$$\leqslant Ct^{\sigma_1}\|I^{\sigma_1}(B_{1/t}^{\sigma,\delta}f-f)\|_{H^p}$$

$$=Ct^{\sigma_1}\|B_{1/t}^{\sigma,\delta}(I^{\sigma_1}f)-I^{\sigma_1}f\|_{H^p}$$

$$\leqslant Ct^{\sigma_1}K_\sigma(I^{\sigma_1}f,t)_{H^p}$$

$$\leqslant Ct^{\sigma_1}K_{\sigma_2}(I^{\sigma_1}f,t)_{H^p}.$$

到此，命题1.1(iv)的证明已告完成。

命题1.2的证明 首先，由推论3.1和定理5.5得到：当 $\delta>\delta_p$ 时，有

$$K_k(f,t)_{H^p}\leqslant C\|B_{1/t}^{k,\delta}f-f\|_{H^p}.$$

但 L. Colzani 已证得(见[Col 1])

$$\|B_{1/t}^{k,\lambda}f-f\|_{H^p}\leqslant C_1\omega_k(f,t)_{H^p}.$$

因此，命题 1.2 中的左端不等式成立。

如记

$$\Delta_h^k f(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f(x+jh),$$

则

$$(\Delta_h^k f)^\wedge(x)=(1-e^{2\pi i h\cdot x})^k\hat{f}(x).$$

因此，当 $g\in H_2^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ 时，有

$$\begin{aligned}(\Delta_h^k g)^\wedge(x)&=(1-e^{2\pi i h\cdot x})^k\hat{g}(x)\\&=|x|^{-k}(1-e^{2\pi i h\cdot x})^k(I^k g)^\wedge(x).\end{aligned}$$

不难验证，如记

$$m(x)=|x|^{-k}(1-e^{2\pi i h\cdot x})^k,$$

则

$$|D^\alpha m(x)|\leqslant C_\alpha|h|^k|x|^{-|\alpha|},\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n.$$

因此，由第 3 章定理 2.2 可知 $m(x)$ 为 H^p 乘子，并且由 $m(x)$ 所确定的乘子算子 T_m 的范数必满足

$$\|T_m\|\leqslant C_\alpha|h|^k.$$

由此推得

$$\|\Delta_h^k g\|_{H^p}\leqslant C_\alpha|h|^k\|I^k g\|_{H^p}.$$

对 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$，由上式推出

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^k f\|_{H^p}&\leqslant C\{\|\Delta_h^k(f-g)\|_{H^p}+\|\Delta_h^k g\|_{H^p}\}\\&\leqslant C\{\|f-g\|_{H^p}+|h|^k\|I^k g\|_{H^p}\}.\end{aligned}$$

注意到上式对任一 $g\in H_2^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ 成立。因此，由定义 1.1 后面的注 1.1 便知，上式已蕴含着命题 1.2 中右端不等式的成立。

§4 临界阶 Bochner-Riesz 平均的逼近

不难证明：当 $\delta=\delta_p=\dfrac{n}{p}-\dfrac{n+1}{2}$，$0<p\leqslant1$ 时，$m(x)=(1-|x|^2)_+^\delta$ 不再是 H^p 乘子。换言之，收敛性的结论

$$\lim_{R\to\infty}\|B_R^\delta f-f\|_{H^p}=0$$

不再成立。因此，对于临界阶 Bochner-Riesz 平均来说，要新选择某种合适的尺度$\|\cdot\|$来代替 $\|\cdot\|_{H^p}$，以保证收敛性的结果

$$\lim_{R\to\infty}\|B_R^\delta f-f\|=0.$$

然后，进一步估计其收敛的速度。

本节中，将分别引进两种这样的尺度。首先，选用弱 H^p 空间 $H(p,\infty)$ 的范数 $\|\cdot\|_{H(p,\infty)}$ 作为第一种尺度的想法是很自然的。回忆一下，$H(p,\infty,\mathbb{R}^n)$ 的定义是

$$H(p,\infty,\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n):f_N^*\in L(p,\infty,\mathbb{R}^n)\},$$

其中 $f_N^*(x)$ 为 f 的 Grand 极大函数。在 $n=1$ 时，$f_N^*(x)$ 可以取以下形式(见[GR 1])：

$$f_N^*(x)=\sup_{\varphi\in K_N}\left\{\int_{\mathbb{R}}f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\}\Big/\left\{\int_{\mathbb{R}}|\varphi(t)|\mathrm{d}t+|I_\varphi|^{N+1}\int_{\mathbb{R}}|\varphi^{(N+1)}(t)|\mathrm{d}t\right\},$$

其中

$$K_N=\{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}):\operatorname{supp}\varphi\subset I_\varphi,\ \operatorname{dist}(x,I_\varphi)<|I_\varphi|\}.$$

不难证明 $f_N^*(x)$ 有以下等价的形式：

$$f_N^*(x)=\sup_{\varphi\in C_0^\infty,\|\varphi\|_N\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}}f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|,\ N>1/p,$$

其中

$$\|\varphi\|_N=\sum_{i=0}^{N+1}|J_\varphi|^i\int_{\mathbb{R}}|\varphi^{(i)}(t)|\mathrm{d}t,$$

以及 J_φ 为同时包含 x 和 I_φ 的最小区间。下面的结果表明：选择 $\|\cdot\|_{H(p,\infty)}$ 作为临界阶 Bochner-Riesz 平均的收敛尺度是合适的。

定理 4.1 设 $0<p<1$，且 $\delta=\dfrac{1}{p}-1$，则

$$\|B_R^\delta f\|_{H(p,\infty,\mathbb{R})}\leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

特别地，有

$$\lim_{R\to\infty}\|B_R^\delta f-f\|_{H(p,\infty,\mathbb{R})}=0,\ f\in H^p(\mathbb{R}).$$

证明 定理后一部分结论可由前一部分结论依常规的论证得

到，而前一部分结论容易被归结于如下的不等式

$$\|B_R^\delta a\|_{H(p,\infty,\mathbb{R})}\leqslant C$$

对任一$\left(p,\ \infty,\ \left[\frac{1}{p}-1\right]\right)$原子 a 成立。不难看出，为证上式，只需证明

$$(B_R^\delta a)_N^*(x)\leqslant C(r+|x-x_0|)^{-1/p}, \tag{4.1}$$

其中 a 满足

(i) $\operatorname{supp} a\subset I=(x_0-r,\ x_0+r)$,

(ii) $\|a\|_\infty\leqslant(2r)^{-1/p}$,

(iii) $\int a(x)x^j\mathrm{d}x=0,\ 0\leqslant j\leqslant\left[\frac{1}{p}-1\right]$.

设 $\varphi\in C_0^\infty$，由不等式

$$\left|\int(B_R^\delta a)(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\|B_R^\delta a\|_\infty\|\varphi\|_1\leqslant C\|a\|_\infty\|\varphi\|_N$$

看出，当 $|x-x_0|\leqslant 2r$ 时，(4.1)式成立。以下，设 $|x-x_0|>2r$。

$$(B_R^\delta a)(t)=(a*B_R^\delta)(t),$$

则对任一$\varphi\in C_0^\infty$，有

$$\int(B_R^\delta a)(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int a(\tau)\left\{\int B_R^\delta(t-\tau)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\tau.$$

如记

$$B(\tau)=\int B_R^\delta(t-\tau)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int B_R^\delta(y)\varphi(\tau+y)\mathrm{d}y,$$

则由原子的消失矩条件(iii)可得

$$\int(B_R^\delta a)(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int a(\tau)\frac{B^{(N)}[x_0\theta+(1-\theta)\tau]}{N!}(\tau-x_0)^N\mathrm{d}\tau.$$

由上式，

$$B^{(N)}(\tau)=\int B_R^\delta(y)\varphi^{(N)}(\tau+y)\mathrm{d}y,$$

以及

$$|\varphi^{(N)}(z)|\leqslant\int_{-\infty}^{z}|\varphi^{(N+1)}(w)|\,\mathrm{d}w\leqslant|J_{\varphi}|^{-N-1}\|\varphi\|_{N},$$

便推得

$$\left|\int(B_R^{\delta}a)(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant C|J_{\varphi}|^{-N-1}\|\varphi\|_N\int|a(\tau)(\tau-x_0)^N|\mathrm{d}\tau.$$

因此，当 $|J_{\varphi}|\geqslant|x-x_0|/2$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\int(B_R^{\delta}a)(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|&\leqslant C|J_{\varphi}|^{-N-1}\|\varphi\|_N\|a\|_{\infty}r^{N+1}\\&\leqslant C|x-x_0|^{-1/p}\|\varphi\|_N.\end{aligned}$$

但当 $|J_{\varphi}|<|x-x_0|/2$ 时，由第 3 章 (5.4) 式（取 $\varphi=[(1-|\cdot|^2)_+^{\delta}]^{\wedge}$）得

$$\sup_{R>0}|(B_R^{\delta}a)(t)|\leqslant C(r+|t-x_0|)^{-1/p}.$$

由此也得

$$\left|\int(B_R^{\delta}a)(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant C|x-x_0|^{-1/p}\|\varphi\|_N.$$

因此，(4.1)式成立，定理证毕。

下面，进一步来建立临界阶 Bochner-Riesz 平均逼近的 Jackson 型不等式。

定理 4.2 设 $f\in H^p(\mathbb{R})$，$0<p<1$，且 $\delta=\dfrac{1}{p}-1$，则

$$\|B_R^{\delta}f-f\|_{H(p,\infty)}\leqslant CK_1\left(f,\frac{1}{R}\right)_{H^p}.$$

在证明定理之前，先建立两个引理。

引理 4.1 设 $0<p\leqslant1$，$\delta>0$，以及 $a(x)$ 为一以 $I=(x_0-r,x_0+r)$ 为支集的 $\left(p,\infty,\left[\dfrac{1}{p}\right]\right)$ 原子。如置

$$A(t)=\int_{-\infty}^{t}a(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则

$$|A(t)-(B_R^{\delta}A)(t)|\leqslant\begin{cases}C|I|^{-1/p}R^{-1}, & \text{当 } |t-x_0|<4r,\\ C|I|^{1-1/p}(R|t-x_0|)^{-1-\delta}, & \text{当 } |t-x_0|\geqslant4r.\end{cases}$$

证明 由等式

$$(B_R^\delta A)(t)=\int\left(1-\frac{|y|^2}{R^2}\right)_+^\delta \hat{A}(y)e^{2\pi i t\cdot y}\mathrm{d}y$$
$$=\pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)\int A\left(t-\frac{u}{R}\right)\frac{J_{1/2+\delta}(|u|)}{|u|^{1/2+\delta}}\mathrm{d}u$$

推出

$$|A(t)-(B_R^\delta A)(t)|$$
$$\leqslant C\left|\int\left\{A(t)-A\left(t-\frac{u}{R}\right)\right\}\frac{J^{1/2+\delta}(|u|)}{|u|^{1/2+\delta}}\mathrm{d}u\right|.$$

由此可得

$$|A(t)-(B_R^\delta A)(t)|$$
$$\leqslant C\|a\|_\infty\int_I\left|\int_{R|t-y|}^\infty\frac{J_{1/2+\delta}(u)}{u^{1/2+\delta}}\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}y.$$

如使用 Bessel 函数的渐近性质

$$J_\alpha(u)=O(u^\alpha),\ u\to O_+,$$

以及

$$J_\alpha(u)\approx C_\alpha u^{-1/2}\cos\left[u-\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\right],\ u\to\infty,$$

则得

$$\left|\int_s^\infty\frac{J_{1/2+\delta}(u)}{u^{1/2+\delta}}\mathrm{d}u\right|\leqslant C\min(1,\ s^{-1-\delta}).\qquad(4.2)$$

考虑以下两种情形。当 $|t-x_0|<4r$ 时，将 I 写成

$$I=I_1\cup I_2\triangleq\left\{y:|t-y|<\frac{1}{R}\right\}\cup\left\{y:|t-y|\geqslant\frac{1}{R}\right\}.$$

此时，使用(4.2)式便得

$$|A(t)-(B_R^\delta A)(t)|$$
$$\leqslant C\|a\|_\infty\left\{\int_{I_1}\mathrm{d}y+\int_{I_2}(R|t-y|)^{-1-\delta}\mathrm{d}y\right\}$$
$$\leqslant C|I|^{-1/p}R^{-1}.$$

当 $|t-x_0|\geqslant 4r$ 时，如使用(4.2)式并注意到 $|t-y|\geqslant|t-x_0|/2$，则得

$$|A(t)-(B_R^\delta A)(t)|\leqslant C\|a\|_\infty\int_I(R|t-y|)^{-1-\delta}\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C|I|^{1-\frac{1}{p}}(R|t-x_0|)^{-1-\delta}.$$

因此，引理证毕。

引理 4.2 设 $0<p<1$, $\delta=\frac{1}{p}-1$, 以及 a 为任一 $\left(p,\ \infty,\ \left[\frac{1}{p}\right]\right)$ 原子。如置

$$A(x)=\int_{-\infty}^{x}a(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\|B_R^\delta A-A\|_{H(p,\infty)}\leqslant CR^{-1},$$

其中常数 C 与 a、R 无关。

证明 设 $\operatorname{supp}a\subset I=(x_0-r,\ x_0+r)$。注意到 $|I|^{-1}A(x)$ 为一 $\left(p,\ \infty,\ \left[\frac{1}{p}-1\right]\right)$ 原子。因此，由定理 4.1 可知引理的结论当 $r<1/R$ 时成立。为此，余下只需证明

$$(B_R^\delta A-A)_\varphi^*(x)\leqslant CR^{-1}(r+|x-x_0|)^{-1/p},\quad 当\ r>1/R. \tag{4.3}$$

下面，分三种情形来考虑：

(i) $r>1/R$, 且 $|x-x_0|<8r$;

(ii) $r>1/R$, $|x-x_0|\geqslant 8r$, 且 $|J_\varphi|\leqslant|x-x_0|/2$,

(iii) $r>1/R$, $|x-x_0|\geqslant 8r$, 且 $|J_\varphi|>|x-x_0|/2$.

对于情形(i),

$$\int\{(B_R^\delta A)(t)-A(t)\}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_{|t-x_0|<4r}+\int_{|t-x_0|\geqslant 4r}\right)\cdots.$$

如对上式右端中两项积分分别使用引理 4.1 中的相应估计，则得

$$\left|\int\{(B_R^\delta A)(t)-A(t)\}\varphi(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant CR^{-1}(r+|x-x_0|)^{-1/p}\|\varphi\|_N.$$

因此，(4.3)式成立。

对于情形(ii)，注意到 $|t-x_0|\geqslant|x-x_0|/2$(当 $t\in\operatorname{supp}\varphi$)，由引理 4.1 也得

$$\left|\int\{(B_R^\delta A)(t)-A(t)\}\varphi(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant Cr^{-1/p}\int(R|t-x_0|)^{-1/p}|\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C|x-x_0|^{-1/p}R^{-1}(R\gamma)^{-\delta}\|\varphi\|_N$$

$$\leqslant CR^{-1}(\gamma+|x-x_0|)^{-1/p}\|\varphi\|_N.$$

因此,(4.3)式也成立.

对于情形(iii),

$$\begin{aligned}
&\int\{(B_R^\delta A)(t)-A(t)\}\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&=\int A(\tau)\left(\int B_R^\delta(u)\{\varphi(u+\tau)-\varphi(\tau)\}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\tau\\
&=\int A(\tau)\left(\int B_1^\delta(v)\left\{\varphi\left(\frac{v}{R}+\tau\right)-\varphi(\tau)\right\}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}\tau\\
&\triangleq\int A(\tau)\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

其中

$$\Phi(\tau)=\int B_1^\delta(v)\left\{\varphi\left(\frac{v}{R}+\tau\right)-\varphi(\tau)\right\}\mathrm{d}v.$$

由原子 $|I|^{-1}A(x)$ 的消失矩条件可得

$$\int A(\tau)\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau=\int A(\tau)\Phi^{(l)}(x_0\theta+(1-\theta)\tau)\frac{(\tau-x_0)^l}{l!}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $l=\left[\frac{1}{p}-1\right]+1$, 且 $0<\theta<1$. 但由等式

$$\begin{aligned}
\Phi^{(l)}(t)&=\int B_1^\delta(v)\left\{\varphi^{(l)}\left(\frac{v}{R}+t\right)-\varphi^{(l)}(t)\right\}\mathrm{d}v\\
&=\int\varphi^{(l+1)}(s)\int_{R(s-t)}^{\infty}B_1^\delta(v)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

推出

$$|\Phi^{(l)}(t)|\leqslant\|\Phi^{(l+1)}\|_\infty\int_{J_\varphi}\left|\int_{R(s-t)}^{\infty}B_1^\delta(v)\,\mathrm{d}v\right|\mathrm{d}s.$$

如记

$$J_1=\{s\in J_\varphi:R(s-t)<1\},$$

以及

$$J_2=J_\varphi\backslash J_1,$$

则由(4.2)式可得

$$\int_{J_\varphi}\left|\int_{R(s-t)}^{\infty}B_1^\delta(v)\,\mathrm{d}v\right|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C\left(R^{-1}+\int_{I_2}|R(s-t)|^{-1-\delta}ds\right)$$

$$\leqslant CR^{-1}.$$

因此，

$$|\Phi^{(l)}(t)|\leqslant CR^{-1}\|\varphi^{(l+1)}\|_\infty\leqslant CR^{-1}|J_\varphi|^{-l-2}\|\varphi\|_{l+1}.$$

如取 $N=l+1$，便得

$$\left|\int A(\tau)\Phi(\tau)d\tau\right|\leqslant CR^{-1}|J_\varphi|^{-N-1}\|A\|_\infty r^N\|\varphi\|_N.$$

显然，上式蕴含着(4.3)式成立，引理证毕。

定理 4.2 的证明 对任一$g\in H^{p,1}$ 和 $f\in H^p$，由定理 4.1 得

$$\|B_R^\delta f-f\|_{H(p,\infty)}\leqslant C(\|f-g\|_{H^p}+\|B_R^\delta g-g\|_{H(p,\infty)}).$$

因此，如能证明

$$\|B_R^\delta g-g\|_{H(p,\infty)}\leqslant CR^{-1}\|I^1g\|_{H^p}, \tag{4.4}$$

其中 $g\in H^{p,1}$，则定理的证明便告完成。

为此，设 $(I^1g)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k(x)$，其中每一 a_k 为 $\left(p,\ \infty,\ \left[\frac{1}{p}\right]\right)$原子，且

$$\inf\left(\sum_k|\lambda_k|^p\right)^{1/p}=\|I^1g\|_{H^p}.$$

不难看出

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k A_k(x),$$

其中

$$A_k(x)=\int_{-\infty}^{x}a_k(t)dt.$$

因此，由弱型估计的叠加原理(见第 3 章引理 5.1) 和引理 4.2 便推得(4.4)式：

$$\begin{aligned}\|B_R^\delta g-g\|_{H(p,\infty)}^p&=\sup_{s>0}s^p|\{x:(B_R^\delta g-g)_N^*(x)>s\}|\\&\leqslant\sup_{s>0}s^p|\{x:\sum_k|\lambda_k|(B_R^\delta A_k-A_k)_N^*(x)>s\}|\\&\leqslant CR^{-p}\left(\sum_k|\lambda_k|^p\right).\end{aligned}$$

到此，定理证毕。

下面，将对 T^n 上的临界阶 Bochner-Riesz 平均引进第二种收敛尺度。

定理 4.3 设 $f\in H^p(T^n)$，$0<p<1$，以及 $\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$。若 $(S_r^\delta f)(x)$ 为 f 在 T^n 上的临界阶 Bochner-Riesz 平均，此即

$$(S_r^\delta f)(x)=\sum_{m\in Z^n}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)_+^\delta C_m(f)e^{im\cdot x},$$

则

$$\sup_{R>1}\left\{\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta f\|_{H^p}^p\frac{\mathrm{d}r}{r}\right\}^{1/p}\leqslant C\|f\|_{H^p}.$$

特别地，有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta f-f\|_{H^p}^p\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r}=0,$$

其中 $C_m(f)$ 为 f 的 Fourier 系数，常数 C 与 f 无关。

在证明定理之前，回忆一下：定义在 T^n 上的函数 $a(x)$ 称为中心在 x_0 处的 (p,∞,s) 原子，是指它满足下列三个条件：

(1) $\operatorname{supp}a\cap x_0+Q^n\subset B(x_0,b)=\{x:|x-x_0|<b\}$,

(2) $|a|_{L^\infty(T^n)}\leqslant|B(x_0,b)|^{-1/p}$,

(3) $\int_{x_0+Q^n}a(x)(x-x_0)^\mu\mathrm{d}x=0,\ |\mu|\leqslant s$,

其中 $x_0+Q^n=\{x_0+x:x\in Q^n\}$，以及

$$Q^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):-\pi\leqslant x_j<\pi,\ 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

命题 4.1 设 $0<p<1$，$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$，以及 $a(x)$ 为任一中心在原点的 $\left(p,\infty,\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$ 原子，则下列点态估计成立：

$$|(S_r^\delta a)(x)|\leqslant Cb^{-n/p},\tag{4.5}$$

$$|(S_r^\delta a)(x)|\leqslant C(rb)^{-\varepsilon/p}|x|^{-n/p},\ \text{当}\ x\in Q^n\backslash B(0,2b),\tag{4.6}$$

以及

$$|(S_r^\delta a)(x)|\leqslant C(rb)^{\beta/p}|x|^{-n/p},\ \text{当}\ x\in Q^n\backslash B(0,2b),\tag{4.7}$$

其中

$$\operatorname{supp}a\cap Q^n\subset B(0,b),\ \varepsilon=n(1-p),$$

$$\beta = p\left\{\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]+1-n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\},$$

且常数 C 与 r、x、a 无关。

证明 注意到 $\delta > (n-1)/2$，由 Poisson 求和公式可知

$$(S_r^\delta a)(x) = \int_{Q^n} a(y)\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\varphi_{1/r}^\delta(x+2\pi m-y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi_{1/r}^\delta(x) = r^n\varphi^\delta(rx)$，以及

$$\varphi^\delta(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1-|\xi|^2)_+^\delta e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

由此推出

$$\begin{aligned}|(S_r^\delta a)(x)| &\leqslant \|a\|_{L^\infty(T^n)}\int_{Q^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\varphi_{1/r}^\delta(x+2\pi m-y)|\mathrm{d}y\\ &\leqslant \|a\|_{L^\infty(T^n)}\|\varphi^\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\leqslant Cb^{-n/p}.\end{aligned}$$

因此，(4.5)式成立。

设 $x\in Q^n\backslash B(0,2b)$。注意到第3章 §5 已指出 $\varphi^\delta\in C^\infty$，且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{n/p}|D^\alpha\varphi^\delta(x)|\leqslant C.$$

由此可得

$$\begin{aligned}|(S_r^\delta a)(x)| &\leqslant \|a\|_{L^\infty(T^n)}\int_{B(0,b)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\varphi_{1/r}^\delta(x+2\pi m-y)|\mathrm{d}y\\ &\leqslant Cb^{-n/p}\int_{B(0,b)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}r^n(r|x+2\pi m-y|)^{-n/p}\mathrm{d}y\\ &\leqslant Cb^{-n/p}r^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|x+2\pi m|^{-n/p}|B(0,b)|\\ &\leqslant C(rb)^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}|x|^{-n/p}.\end{aligned}$$

因此，(4.6)式成立。

如记 $P(y)$ 为 $\varphi_{1/r}^\delta(x+2\pi m-y)$ 关于 y 的 $\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 阶 Taylor 多项式，则由原子 a 的消失矩条件得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{B(0,b)}a(y)\varphi_{1/r}^\delta(x+2\pi m-y)\mathrm{d}y\right|\\ &\leqslant \|a\|_{L^\infty(T^n)}\int_{B(0,b)}|\varphi_{1/r}^\delta(x+2\pi m-y)-P(y)|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\leqslant Cb^{-n/p}\int_{B(0,b)} r^n|ry|^{[n(\frac{1}{p}-1)]+1}$$

$$\cdot(r|x+2\pi m-\theta_m y|)^{-n/p}\,dy,$$

其中 $0<\theta_m<1$。再注意到 $x\in Q^n\backslash B(0,2b)$，由上式便得

$$\left|\int_{B(0,b)} a(y)\varphi_{1/r}^{\delta}(x+2\pi m-y)\,dy\right|$$

$$\leqslant C(rb)^{[n(\frac{1}{p}-1)]+1-n(\frac{1}{p}-1)}|x+2\pi m|^{-n/p},$$

由此可推得(4.7)式，命题证毕。

由 $H^p(T^n)$ 的原子分解结构定理，定理 4.3 的结论可由如下的命题直接推出。

命题 4.2 设 $0<p<1$，$\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$，以及 a 为任一$\left(p,\infty,\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$原子，则

$$\sup_{R>1}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^{\delta}a\|_{H^p}^p\,\frac{dr}{r}\leqslant C,$$

其中常数 C 与 a 无关。

证明 首先证明不等式

$$\sup_{R>1}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^{\delta}a\|_p^p\,\frac{dr}{r}\leqslant C \tag{4.8}$$

对任一$\left(p,\infty,\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$原子 a 成立。不妨设原子 a 的中心在原点，并考虑两种情形。当 $b\geqslant e^{-1}$ 时，其中 b 为 a 的支集球的半径，由不等式

$$\|S_r^{\delta}a\|_p^p\leqslant C\|S_r^{\delta}a\|_2^p\leqslant C\|a\|_2^p\leqslant Cb^{-n}$$

便看出(4.8)式成立。以下设 $0<b<e^{-1}$。

$$\|S_r^{\delta}a\|_p^p=\int_{B(0,2b)}|(S_r^{\delta}a)(x)|^p dx$$

$$+\int_{Q^n\backslash B(0,2b)}|(S_r^{\delta}a)(x)|^p dx$$

$$\triangleq I_1+I_2,$$

则由(4.5)式，(4.6)式，以及(4.7)式分别得

$$I_1\leqslant C, \tag{4.9}$$

$$I_2\leqslant C(rb)^{-\varepsilon}|\log b|, \tag{4.10}$$

以及

$$I_2\leqslant C(rb)^{\beta}|\log b|. \tag{4.11}$$

因此，由(4.9)式便推出

$$\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta a\|_p^p\frac{\mathrm{d}r}{r}\leqslant C+\frac{1}{\log R}\int_1^R I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

为估计上式右端第二项，需要分别考虑以下三种情形：$1<R\leqslant e$, $e<R\leqslant b^{-1}$, 以及 $b^{-1}<R$.

当 $1<R\leqslant e$ 时，由(4.11)式得

$$\frac{1}{\log R}\int_1^R I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}\leqslant C\,b^{\beta}|\log b|\frac{R^{\beta}-1}{\log R}\leqslant C.$$

当 $e<R\leqslant b^{-1}$ 时，同样使用(4.11)式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log R}\int_1^R I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}&\leqslant C\,b^{\beta}|\log b|\frac{R^{\beta}-1}{\log R}\\&\leqslant\frac{C}{\log R}(bR)^{\beta}\log\frac{1}{b}\\&\leqslant C\{(bR)^{\beta}|\log bR|+(bR)^{\beta}\}\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

当 $b^{-1}<R$ 时，由(4.10)式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log R}\int_1^R I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}&=\frac{1}{\log R}\int_1^{b^{-1}}I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}\\&\quad+\frac{1}{\log R}\int_{b^{-1}}^R I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}\\&\leqslant C+\frac{1}{\log R}\int_{b^{-1}}^R I_2\frac{\mathrm{d}r}{r}\\&\leqslant C+\frac{Cb^{-\varepsilon}|\log b|}{\log R}\int_{b^{-1}}^R r^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}r\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

因此，(4.8)式成立。

对任一 p, $0<p<1$, 必存在一 $l\in N$, 使得 $p>\frac{n-1}{n-1+l}$. 作多重指标 $J=(j_1,\cdots,j_l)$, 其中 $0\leqslant j_1,\cdots,j_l\leqslant n$, 并定义关于多重指标 J 的 Riesz 变换 R_J 如下：

$$R_j f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(-i\frac{m_{j_1}}{|m|}\right)\cdots\left(-i\frac{m_{j_k}}{|m|}\right)C_m(f)e^{im\cdot x},$$

其中当 $j_i=0$ 时，因子 $-im_{j_i}/|m|$ 以 1 代替。依类似于 $\mathbb{R}^n$ 的情形，可以证明(见第3章引理 6.2)

$$\|R_j f\|_{H^p(T^n)}\leqslant C\|f\|_{H^p(T^n)} \tag{4.12}$$

和

$$\|f\|^p_{H^p(T^n)}\leqslant C\sum_j\|R_j f\|^p_{L^p(T^n)},\quad 当\ f\in H^p(T^n)\cap L^2(T^n). \tag{4.13}$$

现在，命题的结论可由(4.8)式，(4.12)式，以及(4.13)式推得：

$$\begin{aligned}
&\sup_{R>1}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta a\|^p_{H^p}\frac{dr}{r}\\
&\leqslant C\sum_j\sup_{R>1}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|R_j(S_r^\delta a)\|^p_p\frac{dr}{r}\\
&=C\sum_j\sup_{R>1}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta(R_j a)\|^p_p\frac{dr}{r}\\
&\leqslant C\sum_j\|R_j a\|^p_{H^p}\\
&\leqslant C\|a\|^p_{H^p}\\
&\leqslant C.
\end{aligned}$$

命题证毕。

定理 4.3 的结论表明，对于临界阶 Bochner-Riesz 平均 $S_r^\delta f$，有着如下的收敛性结果：

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta f-f\|^p_{H^p}\frac{dr}{r}=0.$$

下面，将进一步给出这种收敛的量化估计。

定理 4.4 设 $0<p<1$，且 $\delta=\dfrac{n}{p}-\dfrac{n+1}{2}$。若 $f\in H^p(T^n)$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta f-f\|^p_{H^p}\frac{dr}{r}\\
&\leqslant CK_1\left(f,\frac{1}{\log R}\right)_{H^p},
\end{aligned}$$

其中常数 C 仅与 p、n 有关。

在证明定理之前，先建立一个辅助引理。

引理 4.3 设 $0<p<1$, $\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$, 且 $\varepsilon>0$, 若 $f\in H^p(T^n)$, 则

$$\int_1^\infty \|S_r^\delta f\|_{H^p}^p \frac{dr}{r^{1+\varepsilon}}\leqslant C\|f\|_{H^p}^p,$$

其中常数 C 仅与 p、n、ε 有关。

证明 仿照命题 4.2 的证明，引理的结论被归结于不等式

$$\int_1^\infty \|S_r^\delta a\|_p^p \frac{dr}{r^{1+\varepsilon}}\leqslant C$$

对任一$\left(p,\ \infty,\ \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$原子 a 成立。不妨设原子 a 的中心在原点，且 $\operatorname{supp} a\subset B(0,\ d)$。

$$\begin{aligned}\|S_r^\delta a\|_p^p=&\int_{B(0,2d)}|(S_r^\delta a)(x)|^p dx\\&+\int_{Q^n\setminus B(0,2d)}|(S_r^\delta a)(x)|^p dx\\\triangleq&\, I_1+I_2.\end{aligned}$$

由(4.5)～(4.7)式易得

$$I_1\leqslant C$$

以及

$$I_2\leqslant C(rd)^{\beta_j}|\log d|,\ j=1,\ 2,$$

其中 $\beta_1=n(p-1)<0$, 而

$$\beta_2=p\left\{1+\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]-n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\}>0。$$

由此推出

$$I_2\leqslant C(rd)^\beta|\log d|,\ \beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2,$$

如取 β 满足 $0<\beta<\varepsilon$, 则得

$$\int_1^\infty \|S_r^\delta a\|_p^p \frac{dr}{r^{1+\varepsilon}}\leqslant C+\int_1^\infty I_2\frac{dr}{r^{1+\varepsilon}}\leqslant C.$$

引理证毕。

定理 4.4 的证明 设 $f\in H^p(T^n)$, 以及 $g\in H_2^{p,1}(T^n)$, 则

$$\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta f-f\|_{H^p}^p\frac{dr}{r}$$
$$\leqslant\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta(f-g)\|_{H^p}^p\frac{dr}{r}$$
$$+\|f-g\|_{H^p}^p+\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta g$$
$$-g\|_{H^p}^p\frac{dr}{r}\leqslant C\|f-g\|_{H^p}^p$$
$$+\frac{1}{\log R}\int_1^R\|S_r^\delta g-g\|_{H^p}^p\frac{dr}{r}.$$

上式最后一步用到了定理 4.3. 因此，为证定理，只需证明

$$\int_1^R\|S_r^\delta g-g\|_{H^p}^p\frac{dr}{r}\leqslant C\|I^1 g\|_{H^p}^p. \tag{4.14}$$

如取一$\varphi\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$，满足

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 当\ |x|\leqslant 1/4,\\ 0, & 当\ |x|\geqslant 1/2.\end{cases}$$

此时，

$$(S_r^\delta g)(x)-g(x)\overset{L^1}{=}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left\{\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)_+^\delta-1\right\}$$
$$\cdot\varphi\left(\frac{m}{r}\right)\hat{g}(m)e^{im\cdot x}$$
$$+\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left\{\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)_+^\delta-1\right\}$$
$$\cdot\left\{1-\varphi\left(\frac{m}{r}\right)\right\}\hat{g}(m)e^{im\cdot x}$$
$$=r^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}u_1\left(\frac{m}{r}\right)|m|\hat{g}(m)e^{im\cdot x}$$
$$+r^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}u_2\left(\frac{m}{r}\right)\left\{\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)_+^\delta-1\right\}$$
$$\cdot|m|\hat{g}(m)e^{im\cdot x},$$

其中

$$u_1(x)=|x|^{-1}\{(1-|x|^2)_+^\delta-1\}\varphi(x),$$

以及

$$u_2(x)=|x|^{-1}\{1-\varphi(x)\}.$$

因此，如定义乘子算子 $U_{j,r}$ 为

$$(U_{j,r}g)(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}u_j\left(\frac{m}{r}\right)\hat{g}(m)e^{im\cdot x},\ j=1,\ 2,$$

则

$$(S_r^\delta g)(x)-g(x)\overset{L^2}{=}r^{-1}U_{1,r}(Ig)(x)+r^{-1}U_{2,r}[S_r^\delta(Ig)-Ig](x).$$

不难验证 u_1 和 u_2 满足引理 2.1 中的 Mihlin 条件。因此，u_1 和 u_2 均为齐性 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 乘子。同理可知 $u_1\left(\frac{\cdot}{r}\right)$ 和 $u_2\left(\frac{\cdot}{r}\right)$ 为齐性 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 乘子。由第 3 章定理 6.1 便得

$$\left\{u_1\left(\frac{m}{r}\right):m\in\mathbb{Z}^n\right\}\text{和}\left\{u_2\left(\frac{m}{r}\right):m\in\mathbb{Z}^n\right\}$$

为齐性 $H^p(\mathbb{T}^n)$ 乘子。由此推得

$$\begin{aligned}&\int_1^R\|S_r^\delta g-g\|_{H^p}^p\frac{\mathrm{d}r}{r}\\&\leqslant C\int_1^R\{\|Ig\|_{H^p}^p+\|S_r^\delta(Ig)\|_{H^p}^p\}\frac{\mathrm{d}r}{r^{1+p}}\\&\leqslant C\left\{\|Ig\|_{H^p}^p+\int_1^\infty\|S_r^\delta(Ig)\|_{H^p}^p\frac{\mathrm{d}r}{r^{1+p}}\right\}\\&\leqslant C\|Ig\|_{H^p}^p.\end{aligned}$$

上式最后一步用到了引理 4.3。因此，(4.14)式成立，定理证毕。

不难看出，定理 4.3 的证明严重依赖于临界阶 Bochner-Riesz 平均之核 φ^δ 的可积性。但是，当 $p=1$ 时，$\varphi^\delta\notin L^1(\mathbb{R}^n)$。因此，产生这样的问题：定理 4.3 的结论当 $p=1$ 时是否成立？下面就 $n=1$ 的情形给出了肯定的答案。应当指出：当 $n=1$ 时，临界阶 Bochner-Riesz 平均便成为 Fourier 部分和了。

定理 4.5 若 $f\in H^1(\mathbb{T})$，则

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^R\frac{\|S_kf\|_{H^1}}{k}\leqslant C\|f\|_{H^1}.$$

特别地，有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^R\frac{\|S_kf-f\|_{H^1}}{k}=0,$$

其中 S_kf 为 f 的 Fourier 级数的 k 阶部分和。

在证明定理之前，先建立一个关于部分和算子在原子上的范数估计。

引理 4.4　设 a 为任一$(1, \infty, 0)$原子，且 $\operatorname{supp} a \subset B = (-b, b)$，则

$$\|S_k a\|_1 \leqslant |\hat{a}(k)| |\log b| + C,$$

其中常数 C 与 a 无关。

证明　如记 D_k 为 Dirichlet 核，则

$$\|S_k a\|_1 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{2B} + \int_{I\setminus 2B} + \int_{[-\pi,\pi)\setminus I}\right\}|(D_k * a)(x)|\mathrm{d}x$$

$$\triangleq A_1 + A_2 + A_3,$$

其中 $I = [-\pi + 2b, \pi - 2b)$。由 Schwartz 不等式易得

$$A_1 \leqslant \frac{\sqrt{2b}}{\pi}\|S_k a\|_2 \leqslant C\frac{\sqrt{2b}}{\pi}\|a\|_2 \leqslant C,$$

以及

$$A_3 \leqslant C.$$

其次，由于$(D_k * a)(x)$与量

$$(D_k^* * a)(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi}\frac{\sin k(x-y)}{x-y}a(y)\frac{\mathrm{d}y}{\pi}$$

相差 $o(1)$（关于 x 为一致），故不妨认为

$$A_2 = \int_{I\setminus 2B}|(D_k^* * a)(x)|\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

$$\leqslant \int_{I\setminus 2B}\left|\int_{[x-\pi, x+\pi)}\frac{\sin k(x-y)}{x-y}a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x.$$

如记 $I_1 = I\setminus 2B$，以及 $I_2 = [x-\pi, x+\pi)\cap B$，则

$$A_2 \leqslant \int_{I_1}\left|\int_{I_2}\frac{\sin k(x-y)}{x}a(y)\cdot\left\{1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\right\}\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{I_1}\left|\int_{I_2}\frac{\sin k(x-y)}{x}a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x + \int_{I_1}\left|\int_{I_2}\frac{\sin k(x-y)}{x}\cdot\left\{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\right\}a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \triangleq A_{21} + A_{22}.$$

不难看出

$$A_{21}\leqslant|\hat{a}(k)|\int_{2b}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant|\hat{a}(k)|\,|\log b|,$$

以及

$$\begin{aligned}A_{22}&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\int_{[-\pi,\pi)\setminus 2B}\left|\int_B y^m a(y)\sin k(x-y)\mathrm{d}y\right|\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{m+1}}\\&\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}\int_{[-\pi,\pi)\setminus 2B}\frac{b^m}{|x|^{m+1}}\,\mathrm{d}x\\&=C\int_{[-\pi,\pi)\setminus 2B}\frac{1}{|x|}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{b}{|x|}\right)^m\mathrm{d}x\leqslant C.\end{aligned}$$

到此，引理证毕。

定理 4.5 的证明 为证定理，由 $H^1(T)$ 的原子分解定理和命题 4.2 的证法知，只需证明不等式

$$\sup_{R\in N}\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{R}\frac{\|S_k a\|_1}{k}\leqslant C \tag{4.15}$$

对任一 $(1,\infty,0)$ 原子 a 成立。

以下设 $R\in N$。由引理 4.4 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{R}\frac{\|S_k a\|_1}{k}\\&\leqslant\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{R}\frac{|\hat{a}(k)|\,|\log b|}{k}+C.\end{aligned}$$

为估计上式右端第一项，需要分别考虑两种情形。首先，当 $2\leqslant R\leqslant b^{-1}$ 时，由不等式(见第 2 章(8.2)式的证明)

$$|\hat{a}(k)|\leqslant 4\pi k b$$

便得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{R}\frac{|\hat{a}(k)|\,|\log b|}{k}\\&\leqslant\frac{C}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{R}b|\log b|\\&=\frac{C}{\log(R+1)}(Rb)\log\frac{1}{Rb}+\frac{C\log R}{\log(R+1)}Rb\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

其次，当 $R>b^{-1}$ 时，由 Hardy 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\hat{a}(k)|}{k}\leqslant C,$$

可得

$$\frac{1}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{R}\frac{|\hat{a}(k)||\log b|}{k}$$

$$\leqslant\frac{\log(b^{-1})}{\log(R+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\hat{a}(k)|}{k}\leqslant C.$$

因此，(4.15)式成立，定理证毕。

下面，将对定理 4.5 中有关收敛性的结论作进一步的推进，给出这种收敛性的量化估计。

定理 4.6 若 $f\in H^1(T)$，则

$$\frac{1}{\log L}\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_kf-f\|_{H^1}}{k}\leqslant CK_1\left(f,\frac{1}{\log L}\right)_{H^1},\quad L>1.$$

在证明定理之前，先建立两个引理

引理 4.5 设 a 为中心在 x_0 处的 $(1,\infty,1)$ 原子，且

$$A(x)=\int_{x_0-\pi}^{x}a(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\|S_kA-A\|_1\leqslant C|\hat{A}(k)||\log b|+\frac{C}{k},$$

其中 $\operatorname{supp}a\subset B=(x_0-b,x_0+b)$，且常数 C 与 a、k 无关。

证明 不妨设 $x_0=0$，并写着

$$(S_kA)(x)=(D_k*A)(x)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x-y)}A(y)\frac{\mathrm{d}y}{2\pi},$$

以及

$$(D_k^**A)(x)=\int_{x-\pi}^{x+\pi}\frac{\sin k(x-y)}{x-y}A(y)\frac{\mathrm{d}y}{\pi},$$

则

$$|(D_k*A)(x)-(D_k^**A)(x)|\leqslant C/k. \tag{4.16}$$

对 b 考虑两种情形。首先，当 $b\geqslant1/2$ 时，有

$$\|S_kA-A\|_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|S_kA-A\|_2$$
$$=\Big(\sum_{m=k+1}^{\infty}|\hat{A}(m)|^2\Big)^{1/2}$$
$$=\Big(\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{|\hat{a}(m)|^2}{m^2}\Big)^{1/2}\leqslant k^{-1}\|a\|_2$$
$$\leqslant cb^{-1/2}/k\leqslant c/k.$$

其次，当 $b<1/2$ 时，记 $J=(-2b,2b)\cup[-\pi,-\pi+b)\cup[\pi-b,\pi)$，此时

$$\|S_kA-A\|_1\leqslant\int_J|(S_kA)(x)-A(x)|\frac{dx}{2\pi}$$
$$+\int_{[-\pi,\pi)\setminus J}|(D_k^**A)(x)-A(x)|\frac{dx}{2\pi}$$
$$+\int_{[-\pi,\pi)\setminus J}|(D_k*A)(x)-(D_k^**A)(x)|\frac{dx}{2\pi}$$
$$\triangleq I_1+I_2+I_3.$$

显然，由(4.16)式便得

$$I_3\leqslant C/k.$$

还不难看出

$$I_1\leqslant|J|^{1/2}\|A-S_kA\|_2$$
$$\leqslant C\,b^{1/2}\cdot\frac{b^{-1/2}}{k}=C/k,$$

以及

$$I_2=\int_{[-\pi,\pi)\setminus J}\Big|\int_B A(y)\sin k(x-y)$$
$$\cdot\Big(\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}+\cdots\Big)\frac{dy}{\pi}\Big|\frac{dx}{2\pi}$$
$$\leqslant\int_{[-\pi,\pi)\setminus J}\frac{1}{|x|}\Big|\int_B A(y)\sin k(x-y)\frac{dy}{\pi}\Big|\frac{dx}{2\pi}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{[-\pi,\pi)\setminus J}|x|^{-m-1}$$
$$\cdot\Big|\int_B y^m A(y)\sin k(x-y)\frac{dy}{\pi}\Big|\frac{dx}{2\pi}.$$

注意到

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus J}\frac{1}{|x|}\left|\int_B A(y)\sin k(x-y)\frac{dy}{\pi}\right|\frac{dx}{2\pi}$$

$$\leqslant C|\hat{A}(k)||\log b|,$$

以及由分部积分可得

$$\left|\int_B y^m A(y)\sin k(x-y)\frac{dy}{\pi}\right|\leqslant Cmb^m/k.$$

由此推出

$$I_2\leqslant C|\hat{A}(k)||\log b|+C/k.$$

因此，引理获证。

引理 4.6 设 $A(x)$ 如同引理 4.5 中所述，则

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k A-A\|_{H^1}}{k}\leqslant C,$$

其中常数 C 与 A、L 无关。

证明 如同命题 4.2 的证法，如以 Hilbert 变换代替多重指标的 Riesz 变换，则引理的证明被归结于如下不等式的成立：

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k A-A\|_1}{k}\leqslant C,$$

其中常数 C 与 A、L 无关。后者是容易证明的。事实上，当 $b\geqslant 1/2$ 时，引理 4.5 的证明中已得到

$$\|S_k A-A\|_1\leqslant C/k.$$

由此推得

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k A-A\|_1}{k}\leqslant C.$$

当 $b<1/2$ 时，注意到 $|B|^{-1}A(x)$ 为一 $(1, \infty, 0)$ 原子，由引理 4.5 和 Hardy 不等式也得

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k A-A\|_1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{L}\left(\frac{|\hat{A}(k)||\log b|}{k}+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\leqslant Cb|\log b|\sum_{k=1}^{L}\frac{||B|^{-1}\hat{A}(k)|}{k}+C$$

$$\leqslant C.$$

引理证毕。

定理 4.6 的证明 对任一 $f\in H^1(\boldsymbol{T})$ 和任一 $g\in H^{1,1}(\boldsymbol{T})$，由

定理 4.5 可得

$$\frac{1}{\log L}\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k f-f\|_{H^1}}{k}\leqslant C\|f-g\|_{H^1}$$
$$+\frac{1}{\log L}\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k g-g\|_{H^1}}{k}。$$

因此，为证定理，只需证明

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k g-g\|_{H^1}}{k}\leqslant C\|I^1 g\|_{H^1}, \tag{4.17}$$

设 $I^1 g(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m a_m(x)$，其中每一$a_m$为$(1,\infty,0)$原子，且

$$\inf(\sum_m|\lambda_m|)=\|I^1 g\|_{H^1}.$$

不难看出

$$g(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m A_m(x),$$

其中 $A_m(x)=\int_{x_m-\pi}^{x}a_m(t)\mathrm{d}t$，而$x_m$为$a_m$的中心。因此，由引理 4.6 便推得

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k g-g\|_{H^1}}{k}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k A_m-A_m\|_{H^1}}{k}$$
$$\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|.$$

因此，(4.17)式成立，定理证毕。

最后，要指出两点。首先，定理 4.6 的估计在下面意义下是准确的：存在一$f_0\in H^1(\mathbb{T})$和一常数C_0，使得

$$\frac{1}{\log L}\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k f_0-f_0\|_{H^1}}{k}\geqslant C_0 K_1\left(f_0,\frac{1}{\log L}\right)_{H^1}.$$

事实上，取 $f_0=\cos 5x\in H^1(\mathbb{T})$，则

$$I^1 f_0=-5\sin 5x\in H^1(\mathbb{T}).$$

由此推出

$$K_1\left(f_0,\frac{1}{\log L}\right)_{H^1}\leqslant C_1/\log L.$$

另一方面，如注意到 $\hat{f}_0(m)=0$，当$|m|<5$，以及

$$(S_k f_0)(x)=0,\ k<5,$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\log L}\sum_{k=1}^{L}\frac{\|S_k f_0-f_0\|_{H^1}}{k}\\ &\geqslant\frac{1}{\log L}\sum_{1}^{4}\frac{\|S_k f_0-f_0\|_{H^1}}{k}\\ &=\frac{1}{\log L}\sum_{k=1}^{4}\|f_0\|_{H^1}/k\\ &\geqslant C_2/\log L.\end{aligned}$$

因此，前面的断言成立，类似地，定理 4.4 的估计(当 $n=1$) 在同样的意义下是准确的。

其次，将指出第二种收敛尺度不适用于 R^n 上的临界阶 Bochner-Riesz 平均。为简单起见，下面仅说明定理 4.5 的结论对非周期情形是不成立的。

事实上，如置

$$a(x)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant|x|<1/4,\\ -1,\ 1/4\leqslant|x|<1/2,\\ 0,\ |x|\geqslant 1/2,\end{cases}$$

则 a 为一$(1,\infty,0)$原子。不妨认为

$$(S_k a)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\sin k(x-y)}{x-y}a(y)\mathrm{d}y.$$

设 $|x|>1$,

$$\begin{aligned}(S_k a)(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\sin k(x-y)}{x}a(y)\mathrm{d}y\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{y\sin k(x-y)}{x(x-y)}a(y)\mathrm{d}y\\ &\triangleq I_1+I_2.\end{aligned}$$

不难看出

$$\begin{aligned}|I_1|&=\frac{1}{|x|}\left|e^{ikx}\hat{a}(k)-e^{-ikx}\hat{a}(-k)\right|\\ &=\frac{2}{|x|}\left|\hat{a}(k)\sin kx\right|\\ &=\frac{16}{k}\left|\sin\frac{k}{4}\right|\sin^2\frac{k}{8}\frac{|\sin kx|}{|x|},\end{aligned}$$

以及

$$|I_2| \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|a(y)|}{x^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}.$$

由此推出

$$\int_{|x|>1} |(S_n a)(x)| \mathrm{d}x = \infty.$$

因此，定理 4.5 的结论对非周期情形是不成立的。

评注与参考文献

§1　K 泛函概念最先是由 J. Peetre 引进的。有关这方面的详细论述可参看 J. Bergh, J. Löfström [BL 1]。

§2　定理 2.1 和定理 2.2 是属于刘智新、陆善镇 [LiuL 1] 的。推论 2.1 也被 L. Colzani [Col 1] 用不同的方法得到，而当 $n=1$ 时，推论 2.1 首先被 P. Oswald [Os 1] 得到。本节的全部结果对周期情形也成立，见刘智新 [Liu 1]。

§3　定理 3.1 是属于刘智新、陆善镇 [LiuL 1] 的。推论 3.1 包含着 [Col 1] 的主要结果。当 $n=1$, $\sigma \in \mathbb{N}$ 时，推论 3.2 也被 A. Soljanik [So 1] 得到，对于高维情形，张严 [Zha 1] 得到了推论 3.2 的部份结论。

§4　定理 4.1 和定理 4.2 是属于陆善镇 [Lu 2] 的，它们对周期情形也成立。定理 4.3 是属于江寅生、刘和平、陆善镇 [JLL 1] 的。定理 4.4 的结论当 $n=1$ 时首先被陈国良、江寅生、陆善镇 [CJL 1] 得到，这里对于一般情形的证明是属于刘和平、刘智新、陆善镇 [LLL 1] 的。定理 4.5 是属于 [JLL 1] 的，而定理 4.6 是在 [CJL 1] 中得到的。引理 4.4 是属于 C. Fefferman 的，参见 B. Smith [Sm 1]。本节最后的两个反例可在 [CJL 1] 中找到。

参 考 文 献

[AM 1] J. Alvarez, M. Milman, H^p continuity properties of Calderón-Zygmund-type operators, J. Math. Anal. Appl. 118 (1986), 65～79.

[B 1] J. Barros-Neto, An Introduction to the Theory of Distributions, Marcel Dekker, Inc. New York, 1973. (中译本，欧阳光中、朱学炎译，上海科学技术出版社，1981)

[BL 1] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation spaces, an introduction, Springer Verlag, 1976.

[Be 1] S. J. Berman, Characterizations of bounded mean oscillation, Proc. Amer. Math. Soc., 51(1975), 117～122.

[Bo 1] R. P. Boas, Entire functions, New York, Acad. Press, 1954.

[BGS 1] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, M. L. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. Amer. Math. Soc., 157 (1971), 137～153.

[CZ 1] A. P. Calderón, A. Zygmund, On higher gradients of harmonic functions, Studia Math., 24(1964), 211～226.

[Ca 1] S. Campanato, Proprieta di una famiglia di spazi funzionali, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), 137～160.

[Ch 1] C. P. Chang, On certain exponential sums arising in conjugate multiple Fourier series, Ph. D. dissertation, University of Chicago, Chicago, 1964.

[CC 1] S. Y. A. Chang, Z. Ciesielski, Spline characterizations of H^1, Studia Math., TLXXV (1983), 183～192.

[CJL 1] G. L. Chen, Y. S. Jiang, S. Z. Lu, Strong approximation of Riesz means at critical index on $H^p(\mathcal{T})$ $(0<p\leqslant 1)$, Approx. Theory & its Appl., 5(1989) 2, 39～49.

[Co 1] R. R. Coifman, A real variable characterization of H^p, studia Math., 51(1974), 269—274.

[CW 1] R. R. Coifman, G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math, Soc., 83(1977), 569～645.

[Col 1] L. Colzani, Jackson theorems in Hardy spaces and approximation by Riesz means, J. Approx. Theory, 49(1987)3, 240～251.

[DJ 1] G. David, J. L. Journé, A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, Ann. of Math.,120(1984), 371～397.

[De 1] K. de Leeuw, On L^p multipliers, Ann. of Math., 91 (1965), 364～376.

[Du 1] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Acad. Press, N. Y., 1971.

[Fe 1] C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation, Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 587~588.

[FRS 1] C. Fefferman, N. M. Rivière, Y. Sagher, Interpolation between H^p spaces: the real method, Trans. Amer. Math. Soc., 191 (1974), 75~81.

[FS 1] C. Fefferman, E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972), 137~193.

[FoS 1] G. B. Folland, E. M. Stein, Hardy spaces on homogeneous groups, Princeton Univ. Press and Univ. Tokyo Press, Princeton, 1982.

[FSo 1] R. Fefferman, F. Soria, The spaces weak H^1, Studia Math., 85 (1987), 1~16.

[FJ 1] M. Frazier, B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, Indiana Univ. Math. J., 34 (1985) 4, 777~799.

[GR 1] J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics, North Holland, Amsterdam, 1985.

[He 1] E. Hernandez, An interpolation theorem for analytic families of operators acting on certain H^p spaces, Pacific J. of Math., 110 (1984) 1, 113~118.

[J1] J. L. Journé, Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón, Lecture Notes in Math., 994, 1~127.

[JLL 1] Y. S. Jiang, H. P. Liu, S. Z. Lu, Some properties of elliptic Riesz means at critical index on $H^p(T^n)$, Approx. Theory & its Appl., 6 (1990) 2, 28~37.

[JN 1] F. John, L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 415~426.

[JSW 1] A. Jonsson, P. Sjögren, H. Wallin, Hardy and Lipschitz spaces on subsets of R^n, Studia Math., 80(1984) 2, 141~166.

[Ka 1] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, Dover publications, Inc., N. Y., 1968.

[KT 1] C. E. Kenig, P. A. Tomas, Maximal operators defined by Fourier multiplies, Studia Math., 68 (1980), 79~83.

[La 1] R. H. Latter, A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms, Studia Math., 62(1978), 93~101.

[Li 1] H. P. Liu, The weak H^p spaces on homogeneous groups, to appear.

[Li 2] 刘和平, 关于 Heisenberg 群上的 Hardy 空间的若干问题, 博士学位论文, 北京师范大学, 1990.

[LiL 1] H. P. Liu, Z. X. Liu, S. Z. Lu, Strong mean approximation on $H^p(T^n)$ for the Riesz means at the critical index, Approx. Theory & its Appl., 6 (1990) 3, 1～5.

[LiL 1] 刘和平，陆善镇，常系数椭圆微分算子本征展开的 Riesz 平均的 H^p 有界性，待发表。

[Liu 1] 刘智新，多元实 Hardy 空间上的逼近与乘子，博士学位论文，北京师范大学，1989。

[LiuL 1] Z. X. Liu, S. Z. Lu, Applications of Hörmander multiplier theorem to approximation in real Hardy spaces, to appear.

[LiuL 2] Z. X. Liu, S. Z. Lu, Transference and Restriction of maximal multiplier on Hardy spaces, to appear.

[Lu 1] 陆善镇，共轭 Bochner-Riesz 平均在 H^p 上的弱型估计，数学年刊，A (1986) 3, 284～288.

[Lu 2] S. Z. Lu, Approximation properties of Riesz means at critical index on real Hardy spaces, Scientia Sinica (Ser. A), XXX(1987) 11, 1150—1159.

[Lu 3] S. Z. Lu, Decomposition of kernel and maximal generalized Bochner-Riesz means, Chinese Quarterly J. of Math., 4 (1989)1, 16～23.

[LuL 1] 陆善镇，刘智新，实 Hardy 空间中的逼近与函数的光滑性，北京师范大学学报(自然科学版)，2(1990)，6～10.

[LW 1] 陆善镇，王昆扬，Bochner-Riesz 平均，现代数学丛书，北京师范大学出版社，北京，1988.

[M 1] R. Macias, H^p-spaces interpolation theorems, Ph. D. Thesis, Washington Univ., Missouri, 1975.

[Ma 1] G. Mauceri, Riesz means for the eigenfunction expansions for a class of hypoeilliptic differential operators, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31(1981), 115～140.

[Me 1] Y. Meyer, Ondelettes, Hermann, Paris, 1990.

[Mi 1] A. Miyachi, On some Fourier multipliers for H^p (R^n), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27 (1980), 157～179.

[Mi 2] A. Miyachi, H^p spaces over open subsets of R^n, Studia Math., T. XCV (1990), 205～228.

[Os 1] P. Oswald, On some approximation properties of real Hardy spaces, J. Approx. Theory, 40(1984), 45～65.

[Pe 1] J. Peetre, Remark on eigenfunction for elliptic operators with constant coefficients, Math. Scand., 15(1964), 83～92.

[Pe 2] J. Peetre, Two observations on a theorem by Coifman, Studia Math., TLXIV (1979)3, 191～194.

[RRT 1] J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz, J. L. Torrea, Calderón-Zygmund Theory for operator-valued kernels, Adv. in Math., 62 (1986)1, 7～48.

[Se 1] S. Semmes, Another characterization of H^p, $0<p<\infty$, with an application to interpolation, Lecture Notes in Math., 992, 212～226.

[Sh 1] H. S. Shapiro, Topics in Approximation Theory, Lecture Notes in Math., Vol. 187, Springer, 1971.

[Sj 1] P. Sjölin, Convolution with oscillating kernels in H^p spaces, J. London Math. Soc., 23(1981) 2, 442～454.

[Sm 1] B. Smith, A strong convergence theorem for $H^1(\mathcal{T})$, Lecture Notes in Math., Vol. 995, 169～173.

[So 1] A. Soljanik, On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbb{R})$ $(0<p\leqslant 1)$ by certain means of Fourier integrals (Russian), Anal. Math., 12(1986), 59～75.

[St 1] E. M. Stein, Localization and summability of multiple Fourier series, Acta Math., 100(1958), 93～147.

[St 2] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[STW 1] E. M. Stein, M. H. Taibleson, G. Weiss, Weak type estimates for maximal operators on certain H^p spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, Supplemento, 1 (1981), 81～97.

[SW 1] E. M. Stein, G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables, I. The theory of H^p spaces, Acta Math., 103 (1960), 25～62.

[SW 2] E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

[Sto 1] E. Storozhenko, Approximation of function of class H^p, $0<p\leqslant 1$ (Russian), Mat. Sb., 105(1978), 601～621.

[TW 1] M. H. Taibleson, G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces, Astérisque, 77(1980), 67～149.

[Tr 1] H. Triebel, Theory of function spaces, Akademische Verlagsgesellschaft Greenst and Porting K. G., Leipzig, 1983.

[Uc 1] A. Uchiyama, Characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of generalized Littlewood-Paley g functions, Studia Math., 81 (1985), 135～158.

[W 1] K. Y. Wang, Generalized Spherical Riesz Means of Multiple Fourier Series, Acta Math Sinica, New Series, 2 (1986)2, 178～202.

[Wa 1] G. N Watson. Theory of Bessel functions, Cambridge, 1952.

[Wi 1] J. M. Wilson, A simple proof of the atomic decomposition for $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0<p\leqslant 1$, Studia Math., 74 (1982), 25～33.

[Zha 1] Y. Zhang, Convergence and approximation behaviours of generalized Abel means defined in $H^p(T^n)$ $(0<p\leqslant 1)$, Kexue Tongbao, 33 (1988) 21, 1758～1762.

[Zhe 1] 郑学安，α 次 δ 阶 Riesz 平均及其在紧李群调和分析中的应用，科学通报。29 (1984) 21, 1342.

[Zy 1] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge Univ. Press, 1959.